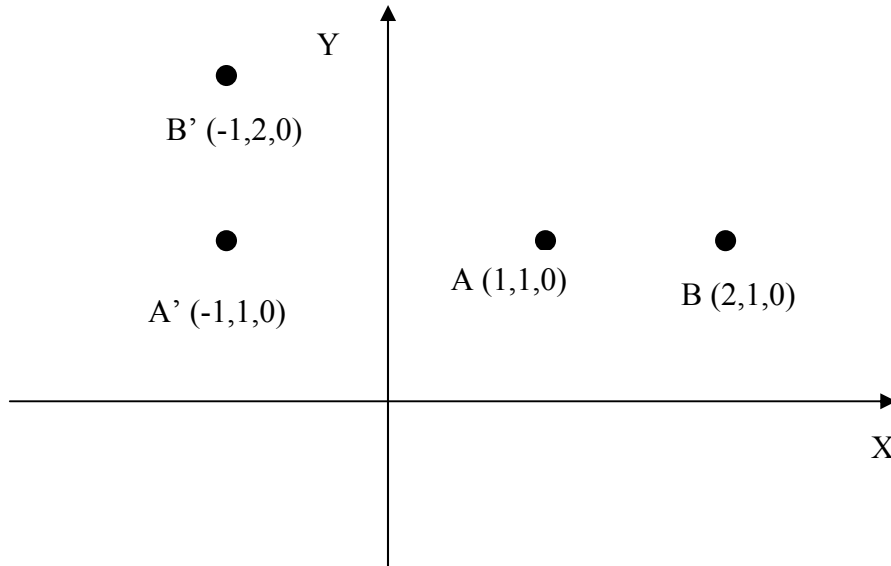


1<sup>η</sup> Σειρά Ασκήσεων

Πλαίσια, γεωμετρικοί μετασχηματισμοί και προβολές

1.



Θεωρήστε ότι βρισκόμαστε στον τρισδιάστατο χώρο (ο άξονας  $Z$  κατευθύνεται προς την πλευρά του αναγνώστη) και διαθέτουμε μόνο τους εξής βασικούς μετασχηματισμούς: μετατόπιση ως προς τους άξονες, περιστροφή ως προς τους άξονες  $X, Y, Z$  (και κέντρο περιστροφής την αρχή των αξόνων), χωριστά για κάθε άξονα και μόνο κατά τη θετική φορά, κλιμάκωση ως προς τους τρεις άξονες με οποιοδήποτε συντελεστή (όχι απαραίτητα τον ίδιο σε κάθε άξονα). α) Επιθυμούμε να μεταφέρουμε το σημείο  $A$  στο σημείο  $A'$  με εφαρμογή ενός μόνο από τους παραπάνω μετασχηματισμούς. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό; Αναφέρετέ τους, δίνοντας κάθε φορά και τις παραμέτρους του μετασχηματισμού.

β) Επιθυμούμε να μεταφέρουμε ταυτόχρονα τα σημεία  $A$  και  $B$  στα σημεία  $A'$  και  $B'$  αντίστοιχα, με την εφαρμογή ενός μόνο από τους παραπάνω μετασχηματισμούς και στα δύο σημεία (ο ίδιος μετασχηματισμός εφαρμόζεται και στα δύο σημεία). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό; Αναφέρετέ τους, δίνοντας κάθε φορά και τις παραμέτρους του μετασχηματισμού.

2. Βρείτε ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές  $\beta_x, \beta_y, \beta_z$  σε ένα μετασχηματισμό κλιμάκωσης ώστε ο συνδυασμός κλιμάκωσης με περιστροφή ως προς τον άξονα των  $z$  να δίνει το ίδιο αποτέλεσμα ανεξάρτητα από την σειρά εφαρμογής των μετασχηματισμών. Εργαστείτε για τη λύση χρησιμοποιώντας τους πίνακες που περιγράφουν τους παραπάνω μετασχηματισμούς σε ομογενείς συντεταγμένες.

3. Στις 2 διαστάσεις η κλιμάκωση ως προς έναν άξονα με συντελεστή ίσο με  $-1$  ισοδυναμεί με ανάκλαση ως προς τον άλλο άξονα. Βρείτε μια διαδοχή βασικών μετασχηματισμών (περιστροφές, κλιμακώσεις, μετατοπίσεις) που να υλοποιούν ανάκλαση στις 2 διαστάσεις ως προς μια οποιαδήποτε ευθεία  $y=mx+h$ . Δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσετε τους συντελεστές των μετασχηματισμών που θα χρησιμοποιήσετε.

4. Εξηγήστε με κατάλληλα σχέδια τα αποτελέσματα της παρακάτω σειρά μετασχηματισμών

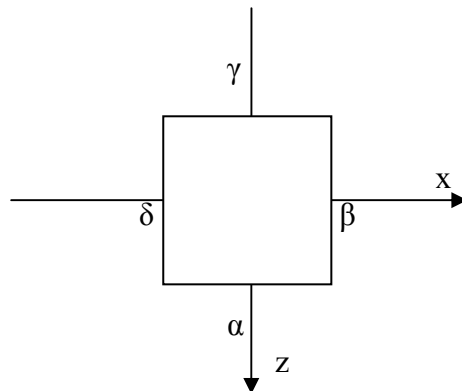
```
glTranslatef(0,0,-10)
```

```
glRotatef(90,0,1,0)
```

```
glScalef(2,2,2)
```

```
glTranslatef(10,0,0)
```

Να δοθούν σχέδια τόσο για τη θεώρηση ενός πλαισίου όσο και για τη θεώρηση δύο πλαισίων (κάμερας και κοσμικό). Το σχήμα στο οποίο επιδρούν οι μετασχηματισμοί είναι ένας κύβος πλευράς 10 με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων και τις έδρες του παράλληλες προς τους άξονες.



Ποια έδρα του κύβου (από τις  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  που σημειώνονται στο σχήμα) παρατηρεί η κάμερα μετά την εφαρμογή των μετασχηματισμών? Θεωρούμε ότι κάμερα βρίσκεται τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων και «βλέπει» προς τα αρνητικά του άξονα  $z$ .

5. Σε ένα πρόγραμμα OpenGL υπάρχουν οι εξής εντολές

```
glLoadIdentity();
```

```
glRotatef(90, 2, 0, 0);
```

```
glScalef(2, 1, 1);
```

```
glBegin(GL_POINTS);
```

```
glVertex3f(0, 1, 0);
```

```
glEnd();
```

Προσδιορίστε ποιος θα είναι ο modelview matrix μετά την εκτέλεση κάθε μίας από τις τρεις πρώτες εντολές και υπολογίστε με βάση την τελική τιμή του σε ποιο σημείο του τρισδιάστατου χώρου θα μεταφερθεί το σημείο που ορίζεται με την εντολή glVertex3f.

6. Ένας άγνωστος συναφής (affine) μετασχηματισμός επιδρά πάνω σε ένα σύνολο σημείων  $P_i=[x_i, y_i, z_i, 1]^T$  και διανυσμάτων  $V_i=[u_i, v_i, w_i, 0]^T$  και τα μετασχηματίζει σε  $P'_i=[x'_i, y'_i, z'_i, 1]^T$ ,  $V'_i=[u'_i, v'_i, w'_i, 0]^T$  αντίστοιχα.

- a) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός σημείων (με γνωστές τις αρχικές και τελικές θέσεις) που χρειαζόμαστε για να προσδιορίσουμε πλήρως τον άγνωστο μετασχηματισμό;
- b) Μπορούμε να προσδιορίσουμε πλήρως τον μετασχηματισμό γνωρίζοντας μόνο την επίδρασή του σε ένα αριθμό διανυσμάτων (με γνωστές τις αρχικές και τελικές τιμές), ναι ή όχι και γιατί; Ποιος είναι ο ελάχιστος συνολικός αριθμός σημείων και διανυσμάτων για να προσδιορίσουμε πλήρως τον μετασχηματισμό και ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός σημείων που απαιτείται να συμμετέχουν σε ένα τέτοιο συνδυασμό;

Αιτιολογήστε αναλυτικά και με την παράθεση των απαραίτητων σχέσεων τις απαντήσεις σας. Θεωρήστε ομογενείς συντεταγμένες.

7. Δείξτε με τη χρήση κατάλληλων (γενικών) σχέσεων ότι η ομοιόμορφη κλιμάκωση διατηρεί τη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων.

8. Βρείτε τον πίνακα μετασχηματισμού που απαιτείται για να μετασχηματιστεί ρόμβος με κορυφές  $A B C D=[(0,1,0), (1,0,0), (2,1,0), (1,2,0)]$  στον ρόμβο με κορυφές  $A' B' C' D'=[(2,4,0), (1,2,0), (2,0,0), (3,2,0)]$  ( $A \rightarrow A'$ ,  $B \rightarrow B'$ , κλπ). Όπως είναι προφανές και οι δύο ρόμβοι βρίσκονται στο επίπεδο  $XY$ . Χρησιμοποιήστε ομογενείς συντεταγμένες.

9. Ένας κύβος με μήκος πλευράς ίσο με τη μονάδα είναι τοποθετημένος με την κάτω-πίσω-αριστερή κορυφή του στην αρχή των αξόνων ενός συστήματος συντεταγμένων. Οι τρεις ακμές που ξεκινούν από την κορυφή αυτή βρίσκονται πάνω στους άξονες του συστήματος. Ορίζουμε ένα νέο δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων που έχει κέντρο την πάνω-μπροστά-δεξιά κορυφή του κύβου και οι άξονές του συμπίπτουν με τις τρεις ακμές που ξεκινούν από την κορυφή αυτή, Βρείτε τον πίνακα που μετατρέπει ένα σημείο ή διάνυσμα από συντεταγμένες του νέου συστήματος σε συντεταγμένες του αρχικού συστήματος (θεωρούμε ομογενείς συντεταγμένες). Ορίστε τις συντεταγμένες του κέντρου του κύβου και του μοναδιαίου διανύσματος στον άξονα  $x$  στο νέο σύστημα και στη συνέχεια υπολογίστε τις συντεταγμένες τους στο αρχικό σύστημα.

10. Τι είναι το σταθερό σημείο του μετασχηματισμού κλιμάκωσης; Ποιο είναι το σταθερό σημείο του μετασχηματισμού κλιμάκωσης που ορίζεται από τον γνωστό πίνακα μετασχηματισμού  $S(\beta_x \beta_y \beta_z)$ ; Βρείτε την έκφραση του πίνακα κλιμάκωσης με σταθερό σημείο το  $(x,y,z)$ .

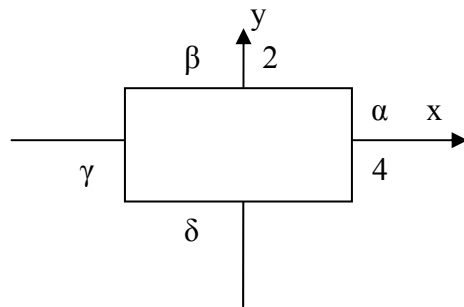
11. Ποια είναι η μορφή που πρέπει να λάβουν οι πίνακες περιστροφής  $R_x(\theta)$ ,  $R_y(\theta)$ ,  $R_z(\theta)$  (σε ομογενείς συντεταγμένες) εάν υιοθετήσουμε αριστερόστροφο σύστημα συντεταγμένων και θέλουμε να διατηρήσουμε τον ορισμό της θετικής φοράς περιστροφής;

12. Εξηγήστε με κατάλληλα σχέδια τα αποτελέσματα της παρακάτω σειρά μετασχηματισμών  
`glRotatef(-90,0,0,1)`  
`glTranslatef(0,10,0)`

glRotatef(90,0,0,1)

glScalef(2,2,2)

Να δοθούν σχέδια τόσο για τη θεώρηση ενός πλαισίου όσο και για τη θεώρηση δύο πλαισίων (κάμερας και κοσμικό). Το σχήμα στο οποίο επιδρούν οι μετασχηματισμοί είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στο τελικό σχήμα σημειώστε και την διάταξη των πλευρών  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ .



13. Διαθέτουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο  $XY$  ( $z=0$ ), έχει το κέντρο του στο σημείο  $(1,1,0)$  και ο μεγάλος του άξονας βρίσκεται πάνω στην ευθεία  $x=y$ . Επιθυμούμε να μεγεθύνουμε το παραλληλόγραμμο στο διπλάσιο, μόνο ως προς τη διεύθυνση του κυρίου άξονά του, με σταθερό σημείο του μετασχηματισμού το κέντρο του. Δώστε σχηματικά τα βήματα των βασικών μετασχηματισμών που πρέπει να εφαρμόσουμε καθώς και τη σειρά των εντολών OpenGL που απαιτούνται (με τα απαραίτητα ορίσματα). Γράψτε την έκφραση του πίνακα Modelview στο τέλος των εντολών, ως γινόμενο πινάκων βασικών μετασχηματισμών. Θεωρούμε ότι αρχικά ο Modelview είναι μοναδιαίος.

14. α) Βρείτε την προβολή  $[x', y', z', 1]^T$  ενός σημείου  $[x_p, y_p, z_p, 1]^T$  πάνω στο επίπεδο  $XY$  ( $z=0$ ) με πλάγια παράλληλη προβολή της οποίας το διάνυσμα κατεύθυνσης προβολής (direction of projection, DOP) είναι το  $[d_x, d_y, d_z, 0]^T$ . Με βάση την απάντησή σας βρείτε τον πίνακα  $P_r$  που υλοποιεί (σε ομογενείς συντεταγμένες) την προβολή αυτή. β) Βρείτε τον πίνακα που υλοποιεί (σε ομογενείς συντεταγμένες) την πλάγια παράλληλη προβολή σε επίπεδο που διέρχεται από σημείο  $\mathbf{p}$  και έχει ως κάθετο διάνυσμα το  $\mathbf{n}$ . Δώστε μια έκφραση του πίνακα αυτού συναρτήσει γνωστών πινάκων μετασχηματισμών χωρίς να προσδιορίσετε πλήρως τις παραμέτρους τους.

15. Έστω ένα σημείο  $\mathbf{p}$  που βρίσκεται στο επίπεδο  $z=0$  (επίπεδο  $x-y$ ). Στο σημείο αυτό εφαρμόζουμε διαδοχικά τους εξής μετασχηματισμούς : α) μετατόπιση κατά 2 στον  $x$  άξονα, β) περιστροφή κατά  $+90^\circ$  γύρω από τον άξονα  $z$  και με κέντρο περιστροφής την αρχή των αξόνων γ) μετατόπιση κατά 1 στον  $y$  άξονα δ) περιστροφή κατά  $+90^\circ$  γύρω από τον άξονα  $z$  και με κέντρο περιστροφής την αρχή των αξόνων. Εναλλακτικά η παραπάνω σειρά των 4 μετασχηματισμών μπορεί να εκφραστεί σαν μία μετατόπιση ακολουθούμενη από μία περιστροφή γύρω από τον άξονα  $z$  και με

κέντρο περιστροφής την αρχή των αξόνων. Καθορίστε ποια θα είναι αυτή η μετατόπιση και η περιστροφή.