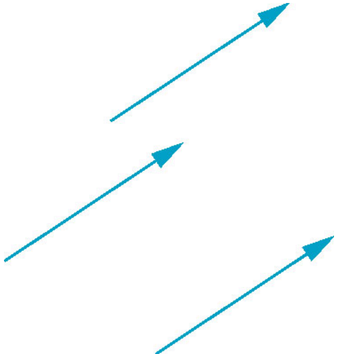
Αντικείμενα και γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

- Τα βασικά γεωμετρικά αντικείμενα και οι μεταξύ τους σχέσεις μπορούν να περιγραφούν με τρεις βασικές γεωμετρικές οντότητες: σημεία, βαθμωτά μεγέθη, διανύσματα
- Τρεις τρόποι για να μελετήσουμε τις οντότητες αυτές:

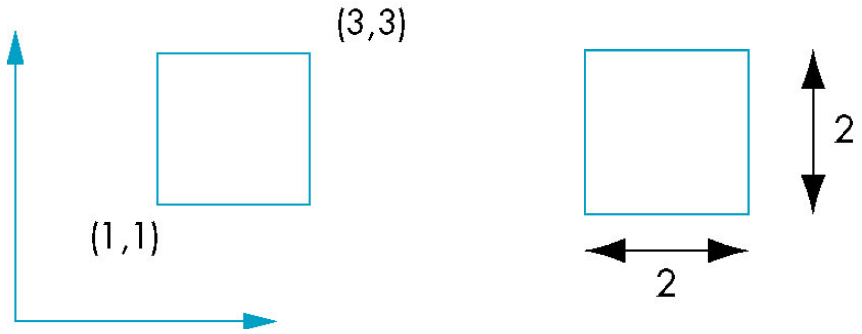
1. Γεωμετρική σκοπιά

- Σημεία: θέση στον τρισδιάστατο χώρο
- Βαθμωτά μεγέθη: πραγματικοί αριθμοί (απόσταση μεταξύ σημείων)
- (Ελεύθερα) διανύσματα: προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα (2, 3, ν διαστάσεων)
  - Διεύθυνση, φορά μέτρο
  - Δεν έχουν συγκεκριμένη θέση στον χώρο



1. Γεωμετρική σκοπιά

- Αρχική προσέγγιση χωρίς σύστημα συντεταγμένων
- Αργότερα: αντί για την αφηρημένη έννοια του διανύσματος/σημείου εισάγουμε την παράστασή του σε ένα σύστημα συντεταγμένων



2. Μαθηματική σκοπιά

- Σημεία, βαθμωτά μεγέθη, διανύσματα: μέλη μαθηματικών συνόλων
- Αφαιρετική προσέγγιση
- Χώρος: Σύνολο στοιχείων S μαζί με πράξεις πάνω στα στοιχεία.
  - Βαθμωτά πεδία, διανυσματικοί χώροι, συναφείς χώροι

3. Σκοπιά επιστήμης υπολογιστών

- Ορισμός τύπων και πράξεων

Συμβολισμοί

- Βαθμωτά μεγέθη: α,β,γ
- Διανύσματα: u,v,w
- Σημεία: P,Q,R

Βαθμωτό πεδίο

- Ορίζουμε δύο πράξεις: “πρόσθεση”, “πολλαπλασιασμός”
- Δεν είναι απαραίτητο να είναι οι «κλασσικές» πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού
- $\alpha, \beta, \in S$ $\alpha+\beta, \alpha\beta \in S$
- Αντιμεταθετική, προσεταιριστική, επιμεριστική ιδιότητα

Βαθμωτό πεδίο

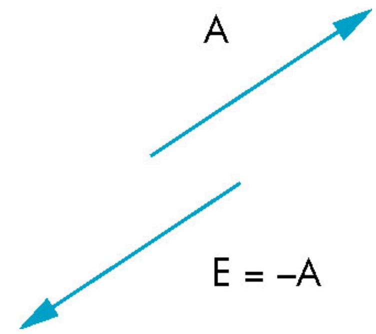
- Ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης (0) & πολ/μου (1)
- Αντίστροφο στοιχείο ως προς την πρόσθεση (-α) και τον πολλαπλασιασμό (α^{-1})

- Βαθμωτό πεδίο που μας ενδιαφέρει: πραγματικοί αριθμοί με την γνωστή πρόσθεση και πολλαπλασιασμό

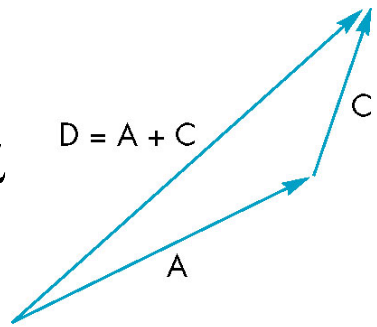
Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος

- Εκτός από βαθμωτά στοιχεία περιέχει και μια άλλη οντότητα: τα διανύσματα
- Εμπεριέχει τις έννοιες της απόστασης και του μέτρου
- Διανυσματικός χώρος V που μας ενδιαφέρει: ελεύθερα γεωμετρικά διανύσματα (προσανατολισμένα ευθ. τμήματα), ν-αδες αριθμών

Διανυσματικός χώρος



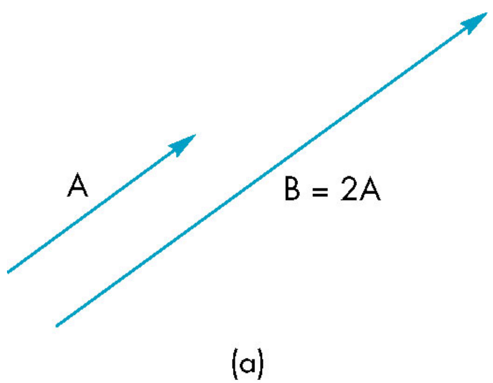
- Επιπλέον πράξεις:
- Πρόσθεση διανυσμάτων : νέο διάνυσμα
- u,v $\in$ V, u+v $\in$ V
- Αντιμεταθετική, προσεταιριστική ιδιότητα
- Μηδενικό διάνυσμα (**0**), αντίστροφο διάνυσμα (-u)
- Ο κανόνας κεφαλής-ουράς (παραλληλογράμμου) για τα γεωμετρικά διανύσματα



(b)

Διανυσματικός χώρος

- Μέτρο διανύσματος |v|: βαθμωτό μέγεθος
  - Γεωμετρικά διανύσματα: μήκος διανύσματος
- Γινόμενο διανύσματος με βαθμωτό αv: διάνυσμα
  - Γεωμετρικά διανύσματα: διάνυσμα με ίδια διεύθυνση, ομόρροπο ή αντίρροπο ανάλογα με το πρόσημο του α
  - $|\alpha v|=|\alpha||v|$
- Επιμεριστική ιδιότητα
  - $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$, $(\alpha+\beta)u=\alpha u+ \beta u$
- Γενίκευση: $\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots$



Διανυσματικός χώρος

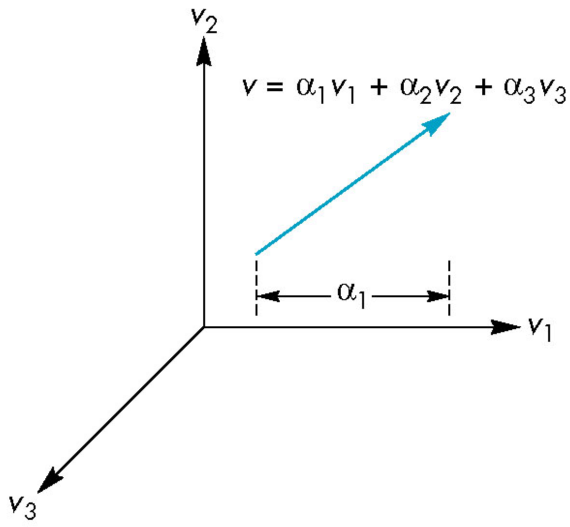
- Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων
- Αν $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots \alpha_n u_n = \mathbf{0}$ μόνο όταν $\alpha_i = 0$ τότε α_i γρ. ανεξάρτητα.
  - Δεν μπορώ να γράψω ένα διάνυσμα ως γρ. συνδυασμό των υπολοίπων
- Διάσταση χώρου: μέγιστος αριθμός ανεξάρτητων διανυσμάτων
  - Στο διανυσματικό χώρο 3-D γεωμετρικών διανυσμάτων, διάσταση = 3
  - 4 διανύσματα πάντα γραμμικά εξαρτημένα

Διανυσματικός χώρος

- Σύνολο n γρ. ανεξάρτητων διανυσμάτων u_1, u_2,...u_n σε n-διάστατο χώρο: βάση του χώρου
- Κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης
- $u=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots\ \alpha_n u_n$
- $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$: αναπαράσταση ως προς τη βάση, n-αδα αριθμών

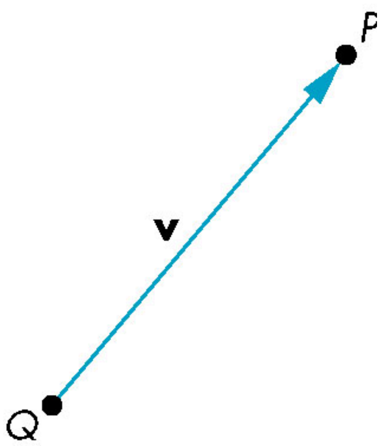
Διανυσματικός χώρος

- Τα διανύσματα βάσης ορίζουν ένα σύστημα συντεταγμένων
- Ο διανυσματικός χώρος δεν έχει την έννοια της θέσης: δεν μας καλύπτει



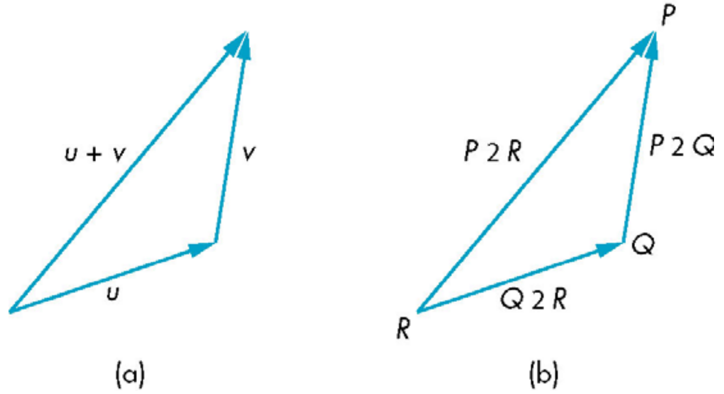
Συναφής/αφφινικός (affine) χώρος

- Εισαγωγή της οντότητας σημείο
- Νέα πράξη: αφαίρεση σημείων v=P-Q : διάνυσμα
  - Γεωμετρική ερμηνεία



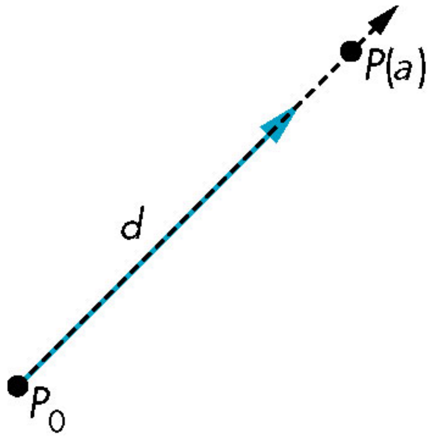
Συναφής (affine) χώρος

- Πρόσθεση σημείου-διανύσματος P=Q+v : νέο σημείο
  - Ο κανόνας κεφαλής-ουράς σε νέα μορφή
  - v= P-Q, u=Q-R, w=P-R
  - (P-Q)+(Q-R)=P-R



Ευθείες

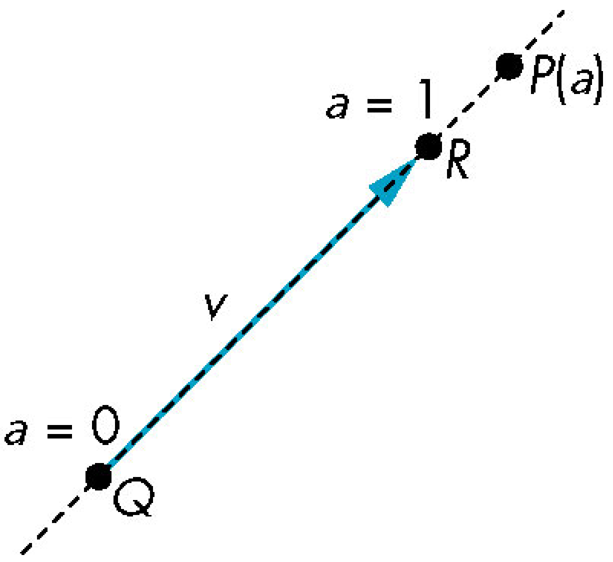
- $P(a)=P_0+\alpha d$: για κάθε τιμή του α ένα σημείο πάνω στην ευθεία που έχει διεύθυνση αυτή του d και περνάει από το P_0
- Παραμετρική εξίσωση ευθείας από σημείο και διάνυσμα
- $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$: ευθύγραμμο τμήμα
- $\alpha>0$, $\alpha<0$ ημιευθεία
- Αλλιώς ευθεία

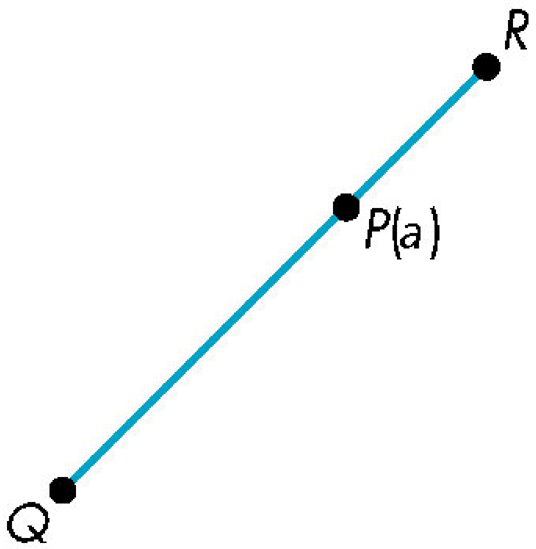


Συναφές άθροισμα (affine sum)

- Δεν ορίζονται: $P+Q$, αP
- Συναφή άθροιση: στοιχεία από τις δύο πράξεις
- $P(\alpha)=Q+\alpha v$
- Υπάρχει R ώστε $v=R-Q$
- $P(\alpha)=Q+\alpha(R-Q)=\alpha R+(1-\alpha)Q=\alpha_1 R+\alpha_2 Q$
- $\alpha_1+\alpha_2=1$
- Εξίσωση ευθείας από δύο σημεία
- $\alpha=0$: $P=Q$, $\alpha=1$: $P=R$
- $0<\alpha<1$: ευθύγραμμο τμήμα QR

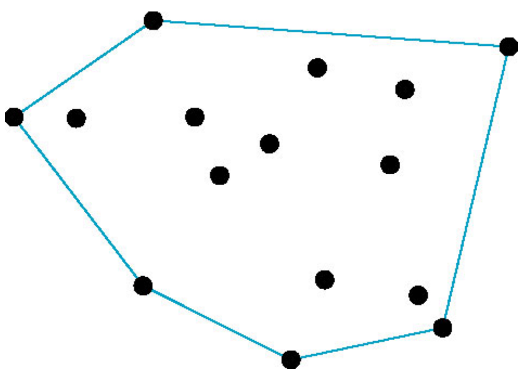
Συναφές άθροισμα (affine sum)





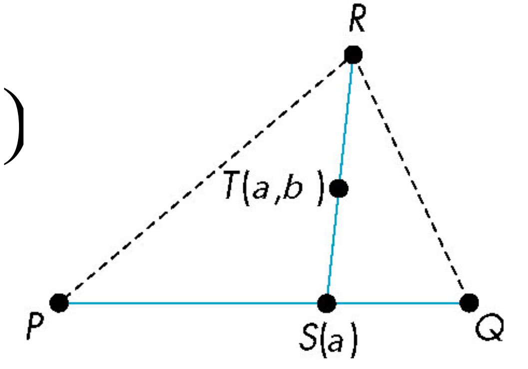
Κυρτό κέλυφος (convex hull)

- Επέκταση συναφούς άθροισης:
  - $P=\alpha_1 P_1+\alpha_2 P_2+\ldots\alpha_n P_n$
  - $\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n=1,\ \alpha_\iota>=0$
- Ο χώρος όλων των P: κυρτό κέλυφος των P_i : το μικρότερο κυρτό σχήμα που περικλείει όλα τα P_i



Επίπεδα

- Επέκταση της παραμετρικής ευθείας
- Τρία σημεία P,Q, R ορίζουν ένα επίπεδο
- $S(\alpha)=\alpha P+(1-\alpha)Q$, $0<\alpha<1$ ευθύγραμμο τμήμα
- $T(\beta)=\beta S+(1-\beta)R$, $0<\beta<1$
- $T(\alpha,\beta)=P+\beta(1-\alpha)(Q-P)+(1-\beta)(R-P)$
  - Παραμετρική εξίσωση επιπέδου που ορίζεται από 3 σημεία



- $T(\gamma,\delta)=P+\gamma u+\delta v$
  - Παραμετρική εξίσωση επιπέδου από σημείο και δύο μη παράλληλα διανύσματα

Εσωτερικό γινόμενο

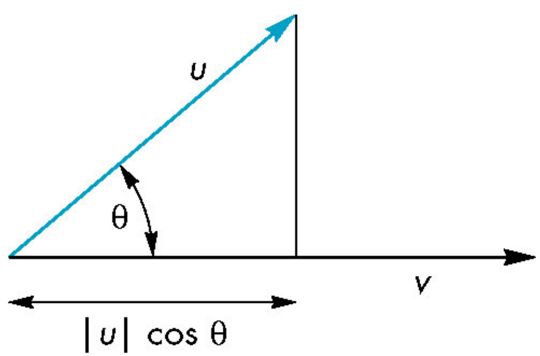
- Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων u·v:

βαθμωτό μέγεθος

- u·v= v·u, (αu+βv) ·w=αu ·w+βv ·w
- u·v=|u||v|cos(θ)
- u·v=0 : ορθογώνια διανύσματα
- $|v|^2 = v \cdot v$
- Απόσταση σημείων $|P-Q| = \sqrt{(P-Q)\cdot(P-Q)} = |v|$

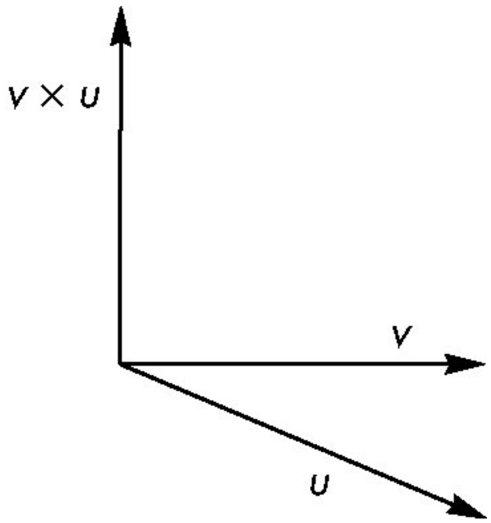
Ορθογώνια προβολή

- Μήκος ορθογώνιας προβολής του u στο v
  $|u|\cos(\theta)=(u\cdot v)/|v|$
- Το u σαν άθροισμα ενός παράλληλου κι ενός κάθετου διανύσματος στο v
  - $u_p = |u|\cos(\theta)(v/|v|)$, $u_n=u- u_p$
- Ορθοκανονική βάση: ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt



Εξωτερικό γινόμενο

- Εξωτερικό γινόμενο uxv : διάνυσμα
  - Ορθογώνιο στα άλλα δύο
  - w= uxv, w·u=w·v=0
  - u,v,w: ορίζουν δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων
  - vxu=-uxv

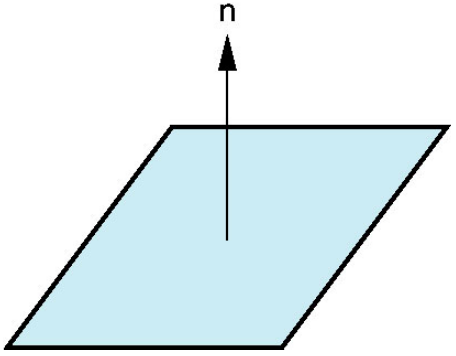


$$|uxv| = \sin\theta\, |u|\,|v|$$

  - Εύρεση 3 ορθογώνιων διανυσμάτων από 2 μη παράλληλα διανύσματα

Εξωτερικό γινόμενο

- T=P+αu+βv
- T-P=αu+βv
- Κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο:
  - n=uxv
  - n ·(T-P)=n·(αu+βv)=0, T: όλα τα σημεία του επιπέδου
  - Εξίσωση επιπέδου που προσδιορίζεται από ένα σημείο του και το κάθετο διάνυσμά του.



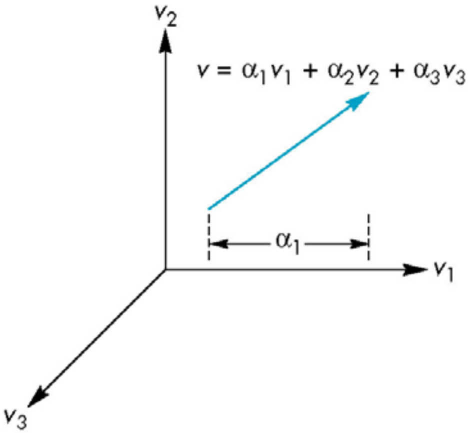
Συστήματα συντεταγμένων

- Από αφηρημένες οντότητες σε αναπαράσταση με πίνακες και ν-άδες αριθμών
- Κάθε διάνυσμα αναπαρίσταται μοναδικά σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης:

$w=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$: συντεταγμένες του w ως προς τη βάση

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad w = \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$



Συστήματα συντεταγμένων

(a) (b)

Πλαίσια συντεταγμένων

- Σε ένα σύστημα συντεταγμένων δεν μπορούμε να καθορίσουμε σημεία
- Μια βάση διανυσμάτων $u_1,...u_n$ και ένα σημείο P_0 (αρχή αξόνων) ορίζουν ένα πλαίσιο
- Με τη χρήση του πλαισίου μπορούμε να ορίσουμε μοναδικά κάθε διάνυσμα και σημείο
- $w=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3$
- $P=P_0+ \beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\beta_3 v_3$

Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

- $[v_1, v_2, v_3]$, $[u_1, u_2, u_3]$: δύο βάσεις

$$u_1=\gamma_{11}v_1+\gamma_{12}v_2+\gamma_{13}v_3$$
$$u_2=\gamma_{21}v_1+\gamma_{22}v_2+\gamma_{23}v_3$$
$$u_3=\gamma_{31}v_1+\gamma_{32}v_2+\gamma_{33}v_3$$

Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

- Αναπαράσταση w ως προς μία βάση
- $w=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3$

$$w = \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

- Αναπαράσταση w ως προς άλλη βάση
- $w=\beta_1 u_1+\beta_2 u_2+\beta_3 u_3$

$$w = \mathbf{b}^T \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

- $\mathbf{a}=\mathbf{M}^T\mathbf{b}$ **:** από συντεταγμένες διανύσματος στη βάση των u σε συντεταγμένες ως προς τη βάση των v
- $\mathbf{b}=(\mathbf{M}^T)^{-1}\,\mathbf{a}$ **:** από συντεταγμένες διανύσματος στη βάση των v σε συντεταγμένες ως προς τη βάση των u
- **M** : αναπαράσταση της βάσης των u ως προς τη βάση των v
- Αντί για αφηρημένη αναπαράσταση w δουλεύουμε με τριάδες αριθμών (συνιστώσες) **a**
- Η αλλαγή γίνεται με πολ/μο πινάκων

Ομογενείς συντεταγμένες

- Συνήθως ένα σημείο P σε ένα πλαίσιο το αναπαριστούμε σαν $\mathbf{p}=[x,y,z]^T$

$P=P_0+ xv_1+yv_2+zv_3$

- Το ίδιο κι ένα διάνυσμα
- $\mathbf{w}=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$

$w=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3$

- Πρόβλημα! Θέλουμε να ξεχωρίζουμε διανύσματα από σημεία.

Ομογενείς συντεταγμένες

- Ο πολλαπλασιασμός με πίνακα αν χρησιμοποιήσω τις «κλασσικές» συντεταγμένες δεν μπορεί να περιγράψει αλλαγή πλαισίου όπου το ένα πλαίσιο είναι μετατοπισμένο ως προς το άλλο.
- Ομογενείς συντεταγμένες: 4-διάστατο διάνυσμα συντεταγμένων

Ομογενείς συντεταγμένες

- Διάνυσμα: $w = x v_1 + y v_2 + z v_3$
- Ορίζω: $0\ P_0 = \mathbf{0}$ (μηδενικό διάνυσμα)
- $w = [x, y, z, 0]\ [v_1, v_2, v_3, P_0]^T = \mathbf{w}^T [v_1, v_2, v_3, P_0]^T$
- Ομογενείς συντεταγμένες διανύσματος

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ομογενείς συντεταγμένες

- Σημείο $P=P_0+ xv_1+yv_2+zv_3$
- Ορίζω: $1\ P_0= P_0$
- $P=[x, y, z, 1]\ [v_1 ,v_2 ,v_3, P_0]^T=\mathbf{p}^T [v_1 ,v_2 ,v_3, P_0]^T$
- Ομογενείς συντεταγμένες σημείου

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Εσωτερικό & εξωτερικό γινόμενο

- Δύο διανύσματα w,u με συντεταγμένες $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0]^T$, $[\beta_1, \beta_2, \beta_3, 0]^T$
- Εσωτερικό γινόμενο w·u :
  - $w \cdot u = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3$
- Εξωτερικό γινόμενο wxu :
  - $wxu = [\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2, \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3, \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1, 0]^T$

Αλλαγή πλαισίου

- Πως θα εκφράσω το $[u_1, u_2, u_3, Q_0]$ στο $[v_1, v_2, v_3, P_0]$?

$u_1=\gamma_{11}v_1+\gamma_{12}v_2+\gamma_{13}v_3$

$u_2=\gamma_{21}v_1+\gamma_{22}v_2+\gamma_{23}v_3$

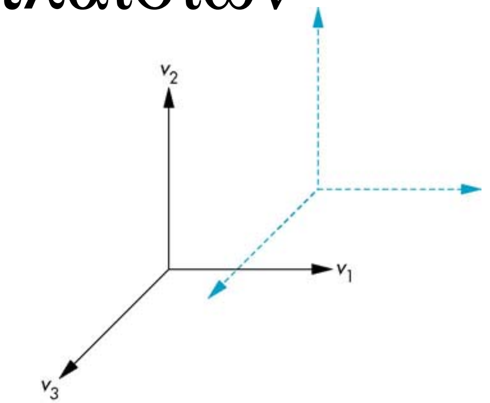
$u_3=\gamma_{31}v_1+\gamma_{32}v_2+\gamma_{33}v_3$

$Q_0=\gamma_{41}v_1+\gamma_{42}v_2+\gamma_{43}v_3+P_0$

Αλλαγή πλαισίου

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ P_0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 0 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

- Περιλαμβάνει και μετατόπιση πλαισίων



- Οι γραμμές του M είναι οι ομογενείς συντεταγμένες των διανυσμάτων βάσης και του σημείου αναφοράς του ενός πλαισίου $[u_1, u_2, u_3, Q_0]$ ως προς το άλλο $[v_1, v_2, v_3, P_0]$

Αλλαγή πλαισίου

- Εύρεση συντεταγμένων σημείου ή διανύσματος σε 2 πλαίσια
- **b**: συντεταγμένες στο $[u_1 ,u_2 ,u_3, Q_0]$
- **a** : συντεταγμένες στο $[v_1 ,v_2 ,v_3, P_0]$
- $\mathbf{a} = \mathbf{M}^T \mathbf{b}$
- **M:** 12 βαθμούς ελευθερίας
- Όλοι οι συναφείς μετασχηματισμοί σαν πολ/μος πινάκων στις ομογενείς συντεταγμένες

Γιατί όλα αυτά?

- Κάμερα & αντικείμενα: ανεξάρτητες οντότητες.
- Τελικός σκοπός: κατασκευή & τοποθέτηση αντικειμένων ώστε να αποτυπωθούν από την κάμερα όπως θέλω.
- Πλαίσιο συντεταγμένων κόσμου / κάμερας
- Αρχική θέση κάμερας: αρχή συντεταγμένων, «βλέπει» στα αρνητικά του z και το «πάνω» είναι ο y

Γιατί όλα αυτά?

- Δύο τρόποι για τοποθέτηση/κίνηση αντικειμένων:
  - 1.α Τοποθέτηση ακριβώς εκεί που θέλω ως προς την κάμερα.
  - 1.β Κίνηση με υπολογισμό των συντεταγμένων με κάποιο δικό μου τρόπο

Γιατί όλα αυτά?

  - 2.α Αρχική τοποθέτηση γύρω η κοντά στην αρχή των συντεταγμένων και μετακίνηση τους εκεί που θέλω.
  - 2.β Αρχική τοποθέτηση σε κάποιο σημείο και κίνηση με εφαρμογή περιστροφών, μετακινήσεων...
- Ο 2ος τρόπος πιο εύκολος!

Γιατί όλα αυτά?

- Δύο σκοπιές για να δούμε αυτούς τους χειρισμούς:
  - Ένα πλαίσιο συντεταγμένων (κοσμικό, η κάμερα ακίνητη στην αρχή) και αλλαγές των συντεταγμένων των αντικειμένων στο σύστημα αυτό (μετασχηματισμοί)
  - Δύο πλαίσια συντεταγμένων: κόσμου και κάμερας (αλλαγή πλαισίου)

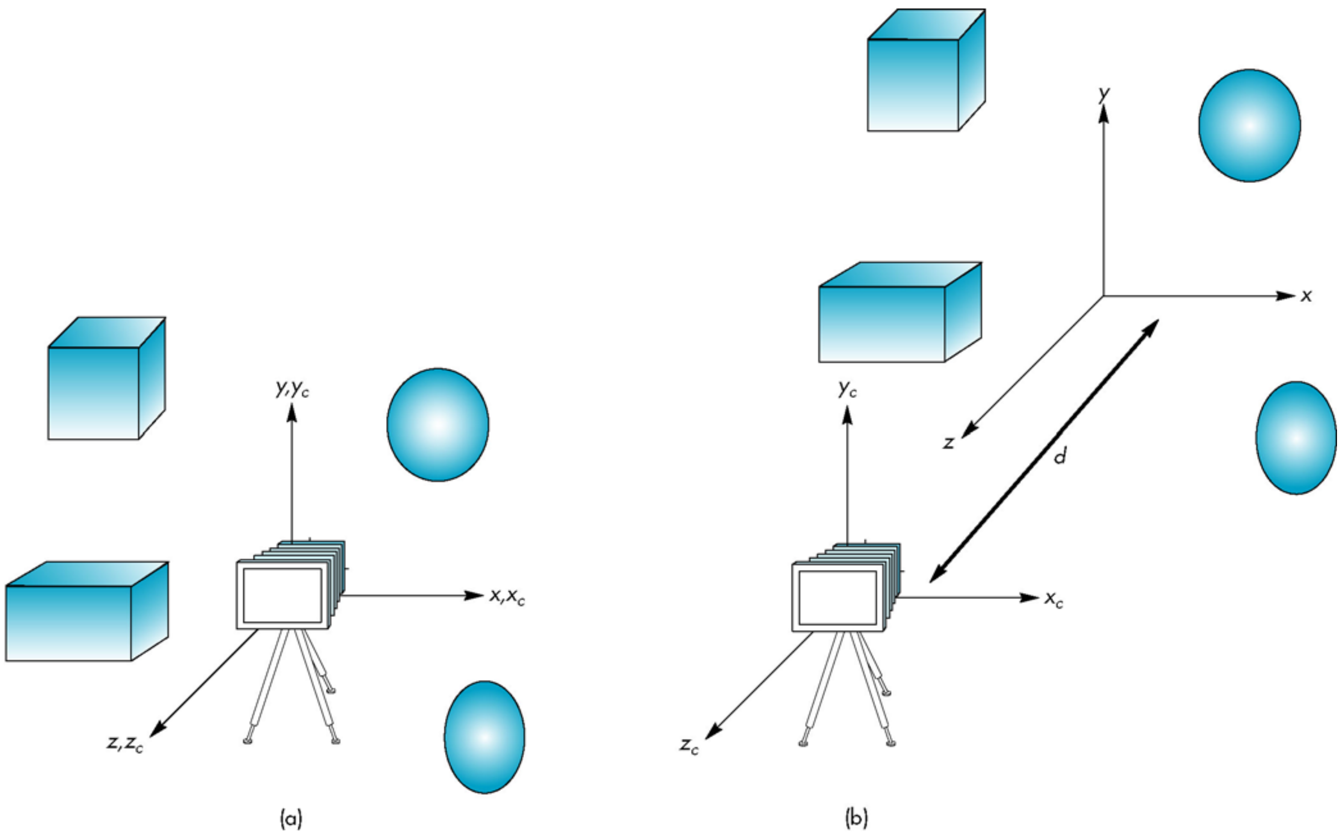
Γιατί όλα αυτά?

- Τοποθετώ τα αντικείμενα στο κοσμικό πλαίσιο.
- Κατασκευάζω τον πίνακα μετασχηματισμού πλαισίου **M** που δηλώνει ποια είναι έκφραση του κοσμικού συστήματος στο σύστημα της κάμερας (σχετική θέση των δύο συστημάτων)
- Model-view matrix $\mathbf{M}^T$: θέση του σημείου που έχω ορίσει στο κοσμικό σύστημα στο σύστημα της κάμερας

Παράδειγμα

- Ζωγραφίζω τα αντικείμενα γύρω από την αρχή.
- Ορίζω ότι το κοσμικό σύστημα είναι σε απόσταση d από το κέντρο και προς τα αρνητικά του ζ: η κάμερα βλέπει το αντικείμενο

Παράδειγμα



Παράδειγμα

- $x=x_c, y=y_c, z=z_c, P=P_c-dz_c$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -d & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -d\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- $[x,y,z,1]^T$ (κόσμου) σε $[x,y,z-d,1]^T$ (κάμερας)