

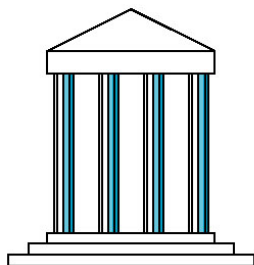
# Κλασσική παρατήρηση & παρατήρηση με υπολογιστή

- Πολλές από τις εργασίες σχεδίασης (αρχιτεκτονικό, μηχανολογικό σχέδιο, κινούμενα σχέδια) γίνονται με υπολογιστή
- Ο χρήστης θα πρέπει να μπορεί να παράξει «κλασικές» όψεις:
  - Προσόψεις, κατόψεις, ισομετρικές όψεις

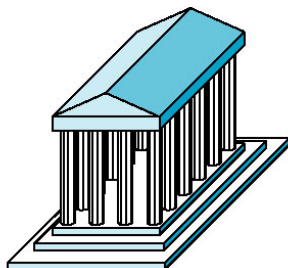
# Κλασσική παρατήρηση

- Κάθε παρατήρηση καθορίζεται από τη σχετική θέση κάμερας-αντικειμένου.
- Τα περισσότερα αντικείμενα, ιδιαίτερα στην αρχιτεκτονική και στο μηχανολογικό σχέδιο αποτελούνται από επίπεδες πλευρές: κύριες όψεις.
  - Πρόσοψη, κάτοψη, δεξιά όψη, ...
- Οι πλευρές συνήθως ορθογώνιες μεταξύ τους: τρεις ορθογώνιες κατευθύνσεις/άξονες.

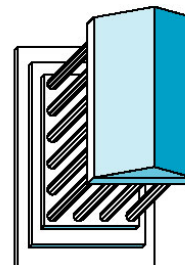
# Κλασική παρατήρηση



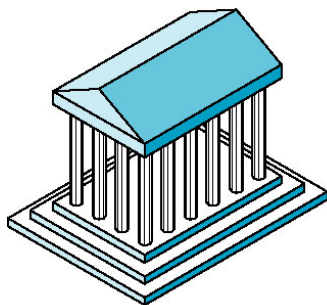
Front elevation



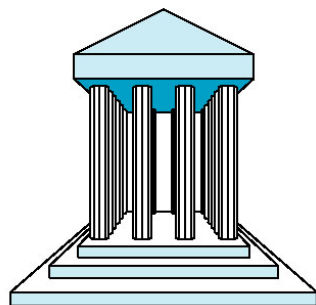
Elevation oblique



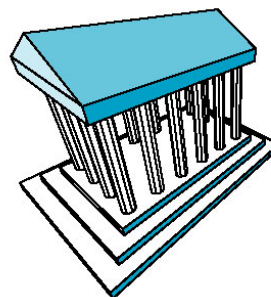
Plan oblique



Isometric

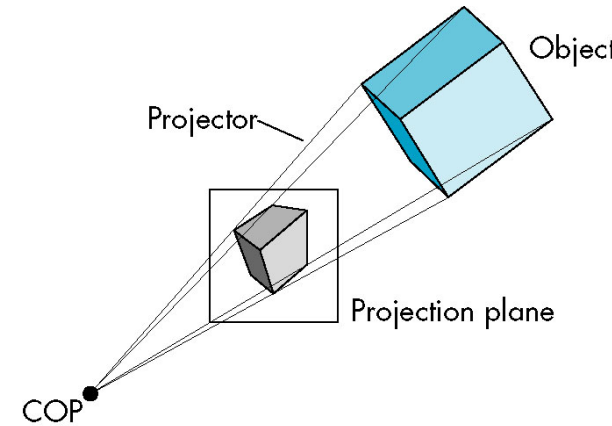


One-point perspective

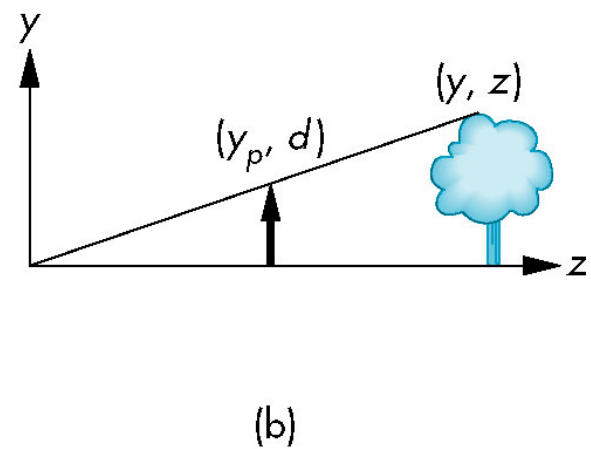
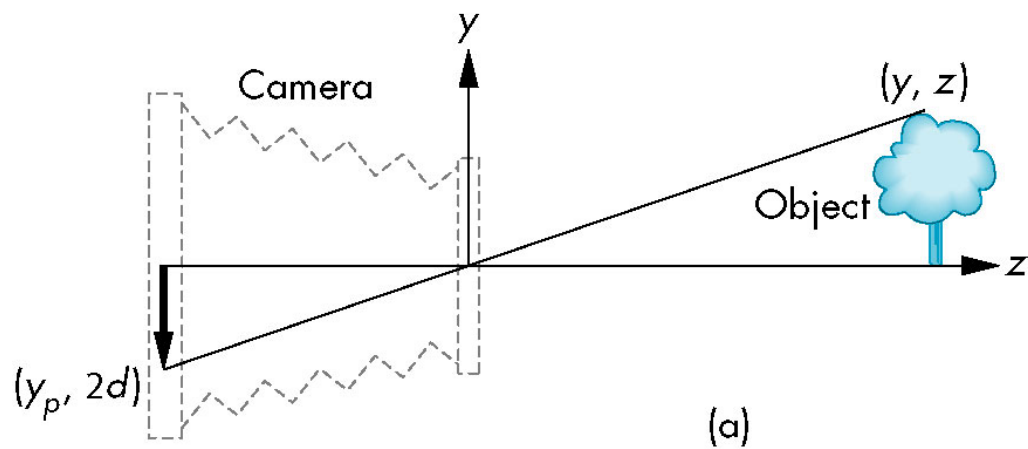


Three-point perspective

# Ομοιότητες



- Από 3-D σε 2-D
- Αντικείμενα, παρατηρητής, επίπεδο προβολής, ευθείες προβολής, κέντρο προβολών (COP)
  - COP: φακός κάμερας, κέντρο του πλαισίου της κάμερας.
  - Όλες οι ευθείες προβολής διέρχονται από το COP.
  - Επίπεδο προβολής (φιλμ): πίσω ή μπροστά από το COP



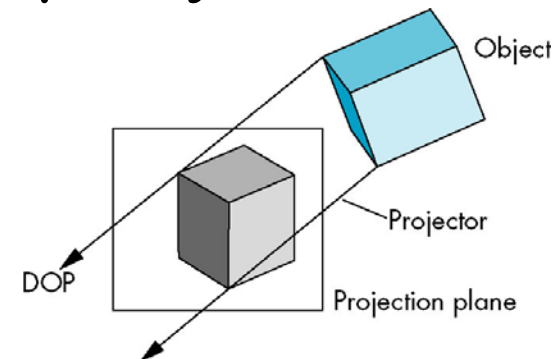
# Είδη παρατήρησης/προβολών

- Επίπεδες γεωμετρικές προβολές
  - Προβολή σε επίπεδο με χρήση ευθειών
  - Διατηρούν τις ευθείες αλλά όχι απαραίτητα τις γωνίες.
- 1. Προοπτική παρατήρηση/προβολή
  - Το COP σε πεπερασμένη απόσταση από το επίπεδο προβολής, οι ευθείες προβολής συναντώνται στο COP.
  - Δεν διατηρεί την παραλληλία

# Είδη παρατήρησης/προβολών

## 2. Παράλληλη παρατήρηση/ προβολή

- Το COP σε άπειρη απόσταση από το επίπεδο προβολής, οι ευθείες προβολής παράλληλες.
- Κατεύθυνση προβολής αντί του COP.
- Υποπερίπτωση της προοπτικής παρατήρησης
- Λόγω της σημασίας της την εξετάζουμε ως διαφορετική περίπτωση

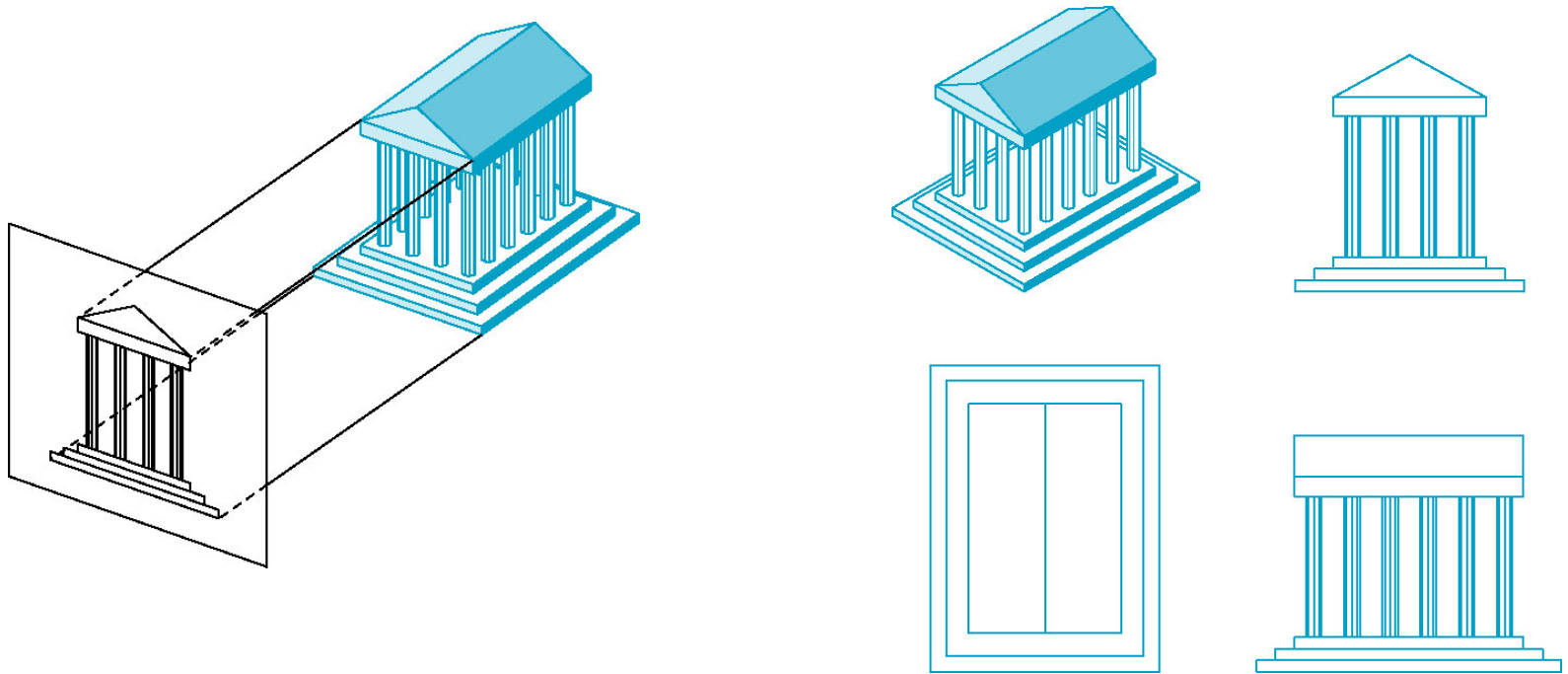


# Παράλληλες προβολές: Ορθογραφικές

- Οι ευθείες προβολής είναι κάθετες στο επίπεδο προβολής.
- Ορθογραφικές προβολές πολλαπλών όψεων
  - Το επίπεδο προβολής παράλληλο σε μια κύρια όψη
  - Πρόσοψη, κάτοψη, δεξιά όψη
  - Φαίνονται μόνο οι αντίστοιχες πλευρές αντικειμένων που μοιάζουν με παραλληλεπίπεδα
  - Διατήρηση αποστάσεων και γωνιών σε επίπεδα παράλληλα με το επίπεδο προβολής: κατάλληλες για μετρήσεις.



# Παράλληλες ορθογραφικές προβολές πολλαπλών όψεων



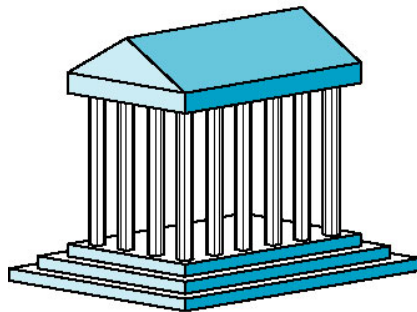
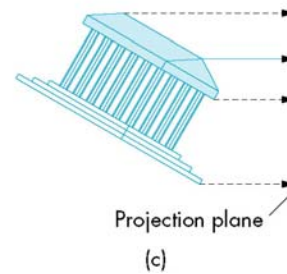
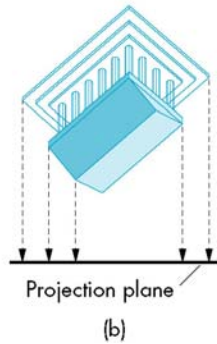
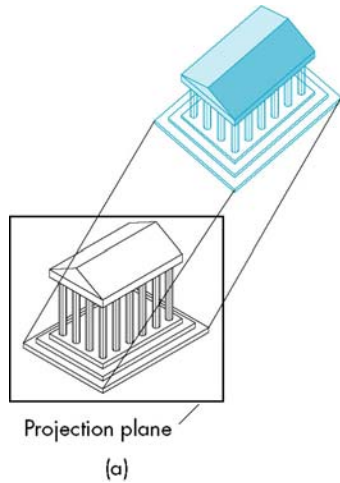
# Παράλληλες ορθογραφικές προβολές: Αξονομετρικές

- Ευθείες προβολής κάθετες στο επίπεδο προβολής.
- Το επίπεδο προβολής έχει οποιοδήποτε προσανατολισμό ως προς το αντικείμενο
- Ισομετρική προβολή : επίπεδο προβολής συμμετρικά ως προς όλες τις κύριες όψεις.
  - Το επίπεδο προβολής τέμνει τους άξονες του αντικειμένου σε ίσες αποστάσεις από την αρχή

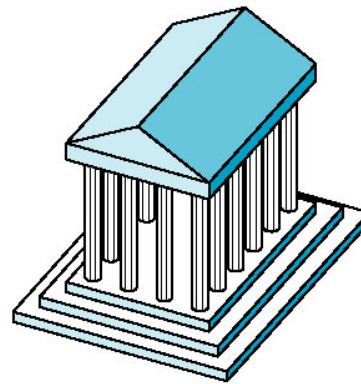
# Παράλληλες ορθογραφικές προβολές: Αξονομετρικές

- Διμετρική προβολή : επίπεδο προβολής συμμετρικά ως προς δύο κύριες όψεις
  - Το επίπεδο προβολής τέμνει τους δύο άξονες του αντικειμένου σε ίσες αποστάσεις από την αρχή
- Τριμετρική προβολή : γενική περίπτωση
  - Το επίπεδο προβολής τέμνει τους άξονες του αντικειμένου σε διαφορετικές αποστάσεις από την αρχή
- Βλέπω όλες τις όψεις, χρήση σε αρχιτεκτονική

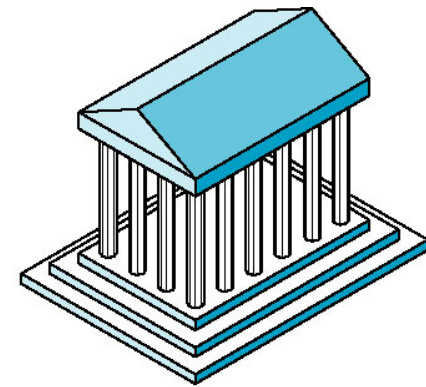
# Παράλληλες ορθογραφικές προβολές: Αξονομετρικές



Dimetric



Trimetric



Isometric

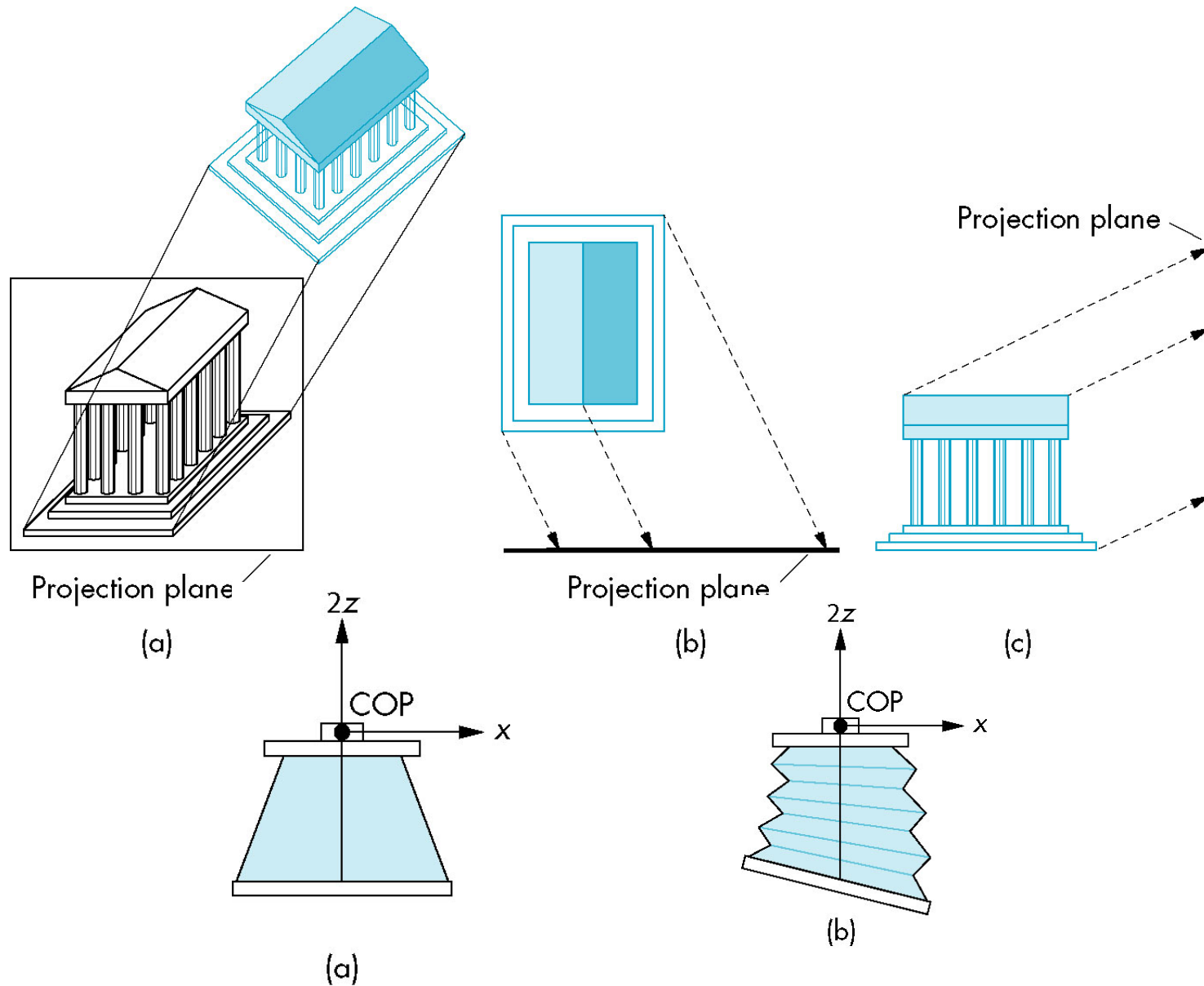
# Παράλληλες ορθογραφικές προβολές: Αξονομετρικές

- Σμίκρυνση των αποστάσεων
- Ισομετρική προβολή: ίδια σμίκρυνση στους τρεις κύριους άξονες (επιτρέπει μετρήσεις)
- Διμετρική προβολή : ίδια σμίκρυνση σε δύο από τους τρεις άξονες
- Τριμετρική προβολή : διαφορετική σμίκρυνση σε κάθε άξονα.
- Διατήρηση παραλληλίας, όχι γωνιών

# Παράλληλες προβολές: Πλάγιες

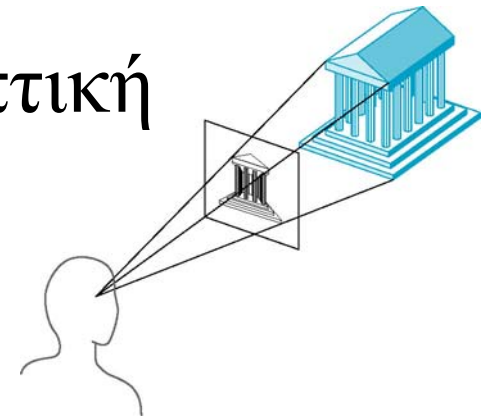
- Οι ευθείες προβολής όχι κάθετες στο επίπεδο προβολής (γενικότερη περίπτωση)
  - Cavalier ( $45^0$ ), cabinet ( $63.4^0$ )
- Ο φακός πλάγια ως προς το επίπεδο προβολής, κάμερα «φυσούνας»
- Γωνίες σε επίπεδα παράλληλα στο επίπεδο προβολής διατηρούνται.
- Δύσκολο να κατασκευαστούν με το χέρι, αφύσικες
  - Μάτι: φακός παράλληλος με το πίσω μέρος
- Εύκολη κατασκευή στα γραφικά υπολογιστή

# Παράλληλες προβολές: Πλάγιες



# Προοπτικές προβολές

- Σμίκρυνση του μεγέθους με την απόσταση.
- Αυτό συμβαίνει στην φύση: τα αντικείμενα έχουν φυσική εμφάνιση.
- Δεν μπορούμε να κάνουμε μετρήσεις.
- Το κέντρο προβολών (φακός) συμμετρικά ως προς το επίπεδο προβολής (φίλμ, πίσω μέρος ματιού): συμμετρική (ορθή) πυραμίδα.
- Γραφικά με υπολογιστή: γενική προοπτική προβολή.





# Κλασσικές προοπτικές προβολές

- Ενός δύο ή τριών σημείων ανάλογα με το πόσες από τις κύριες διευθύνσεις (άξονες) του αντικειμένου είναι παράλληλες με το επίπεδο προβολών.
- Τριών σημείων: κανένας κύριος άξονας παράλληλος με το επίπεδο προβολών
  - Παράλληλες ευθείες στους τρεις κύριους άξονες του αντικειμένου τέμνονται σε τρία σημεία φυγής (vanishing points)

# Κλασσικές προοπτικές προβολές

- Δύο σημείων: ένας κύριος άξονας παράλληλος με το επίπεδο προβολών
  - Παράλληλες ευθείες σε δύο κύριους άξονες τέμνονται σε δύο σημεία φυγής
- Ενός σημείου: δύο κύριοι άξονες παράλληλοι με το επίπεδο προβολών
  - Παράλληλες ευθείες σε έναν κύριο άξονα τέμνονται σε ένα σημείο φυγής

# Κλασικές προοπτικές προβολές



(a)



(b)



(c)

# Προβολές

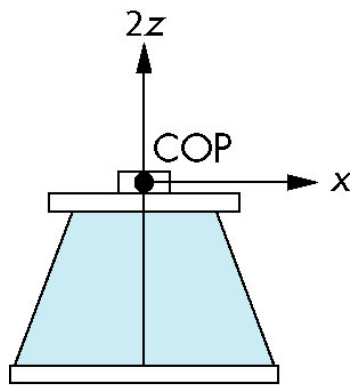
- Προβολές: επιλογή φακού και θέσης/διάστασης φιλμ.
  - Προοπτική προβολή: ευρυγώνιος
  - Παράλληλη προβολή: τηλεφακός
- Το είδος προβολής καθορίζεται από τον projection matrix.
  - Με απευθείας καθορισμό
  - Με χρήση ειδικών εντολών
- Projection matrix: μέρος της κατάστασης του συστήματος

# Προοπτική Προβολή

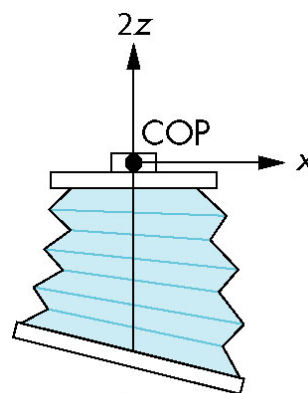
- Συνήθως το φιλμ παράλληλο με το φακό
- Γενική περίπτωση το φιλμ σε πλάγια θέση
- Το επίπεδο προβολής ισοδύναμα μπροστά από το φακό στη θέση  $z=d$  ( $d<0$ )
- $(x, y, z)$  σε  $(x_p, y_p, z_p)$  : προοπτικός μετασχηματισμός

$$\frac{x}{z} = \frac{x_p}{d} \quad x_p = \frac{x}{z/d} \quad y_p = \frac{y}{z/d} \quad z_p = d$$

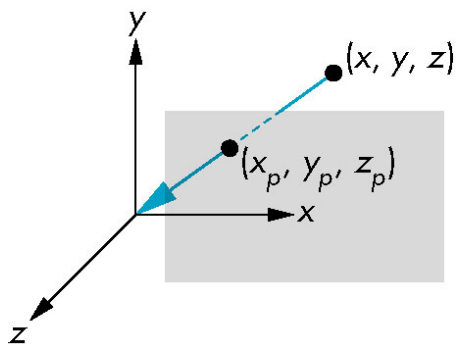
# Προοπτική Προβολή



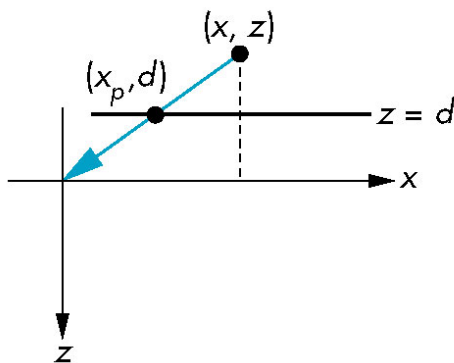
(a)



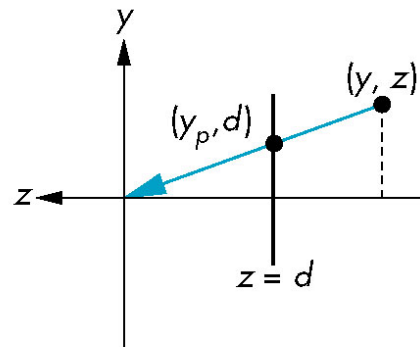
(b)



(a)



(b)



(c)

# Προοπτική Προβολή

- Προοπτική σμίκρυνση (foreshortening): ανομοιόμορφη ελάττωση μεγέθους
  - Εξαρτώμενη από το  $z$
- Προοπτικός μετασχηματισμός: διατηρεί ευθείες, δεν είναι συναφής, δεν είναι αντιστρέψιμος.
  - Έχοντας το  $(x_p, y_p, z_p)$  δεν μπορώ να βρω το  $(x, y, z)$
  - Όλα τα σημεία πάνω στην ευθεία προβολής μετασχηματίζονται (προβάλλονται) στο ίδιο σημείο.

# Νέα μορφή ομογενών συντεταγμένων

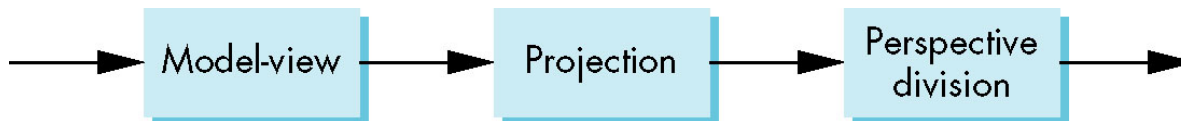
- Αναπαράσταση σημείου
- Επιστροφή στην κλασική μορφή  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$   
με διαίρεση με το  $w$
- Μετασχηματισμοί: πίνακες  $4 \times 4$  με  
μεταβλητή την τελευταία γραμμή (όχι  $0 \ 0 \ 0$   
 $1$ ).
  - Το  $w$  αλλάζει κατά το μετασχηματισμό
- Μπορώ να υλοποιήσω μετασχηματισμούς  
προβολών (μη συναφείς).



# Προοπτική Προβολή

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ z/d \end{bmatrix}$$

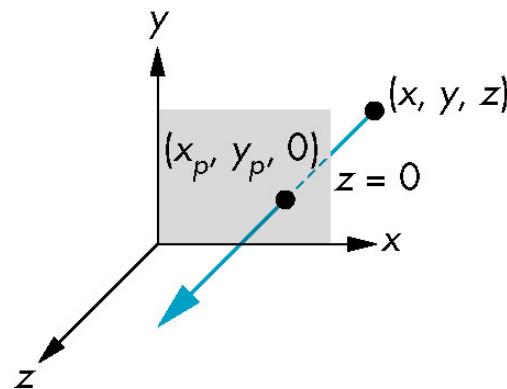
- Ο  $\mathbf{M}$  ακολουθούμενος από προοπτική διαίρεση (perspective division) υλοποιεί προοπτική προβολή
- Η προοπτική διαίρεση μέρος της αλυσίδας γραφικών.



# Ορθογραφική Προβολή

- Ειδική περίπτωση παράλληλης προβολής
- Το φιλμ παράλληλο στο φακό, COP στο άπειρο
- Για επίπεδο προβολής (φιλμ) στο  $z=0$ :

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

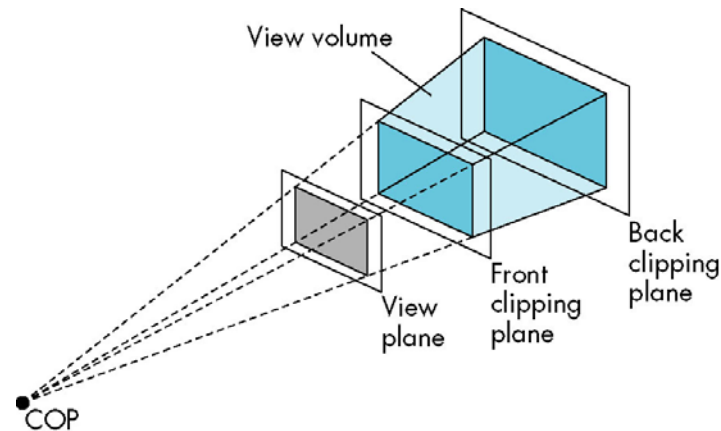
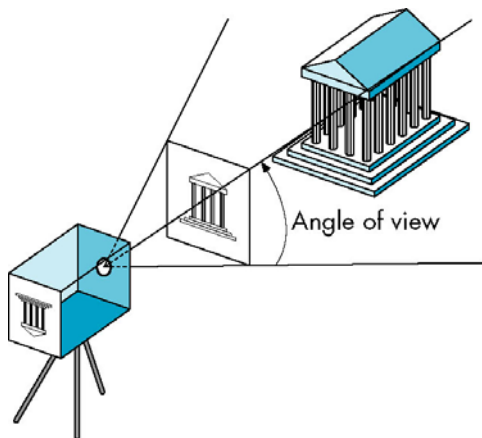


# Προβολές στην OpenGL

- Πρέπει να λάβουμε υπ όψιν μας και το μέγεθος του φιλμ
- Είδος προβολής (προοπτική, παράλληλη)
- Ψαλιδισμός αντικειμένων
  - Όγκος παρατήρησης: ποιο τμήμα του κόσμου βλέπουμε
- Γραφικά: πεπερασμένος όγκος παρατήρησης
  - Κόλουρη πυραμίδα (frustum)
  - Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

# Προβολές στην OpenGL

- Προοπτική προβολή:
- Το COP στην αρχή του πλαισίου της κάμερας
- Πρέπει να ορίσω τις έξι πλευρές της πυραμίδας
  - Με ειδικές εντολές: περιορισμένη ευελιξία
  - Με απευθείας ορισμό του projection matrix

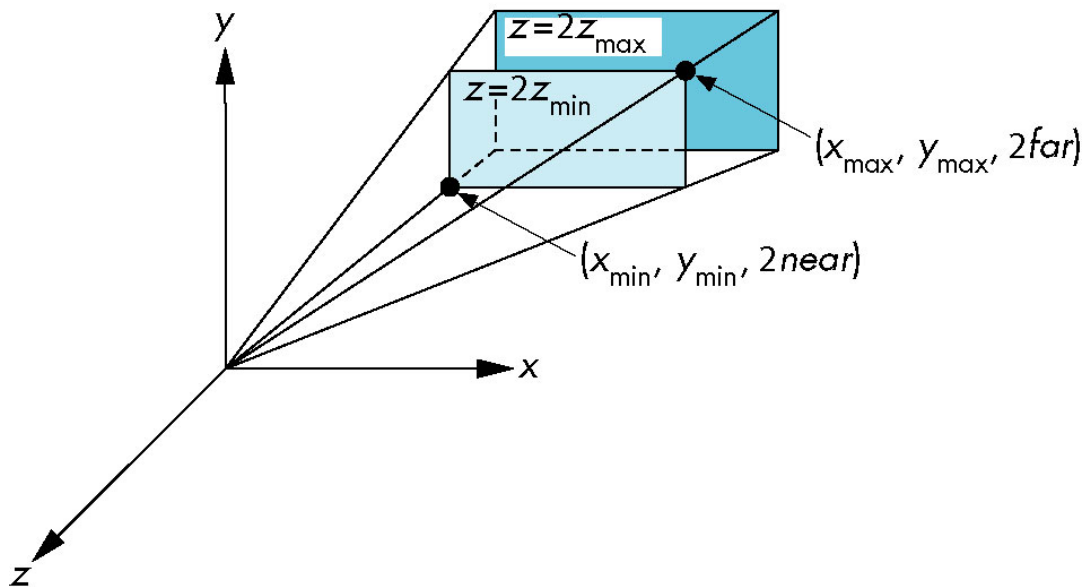


# Προοπτική Προβολή & OpenGL

- `glFrustum(xmin, xmax, ymin, ymax, near, far)`
- Συντεταγμένες ως προς το σύστημα της κάμερας, η κάμερα στην αρχή, «κοιτάει» στα αρνητικά  $z$ .
- `near` & `far` θετικές τιμές: αποστάσεις από το COP, ορίζουν επίπεδα παράλληλα στο  $z=0$ 
  - $z=-far$ ,  $z=-near$
  - Κοντινό παραλληλόγραμμο ψαλιδισμού:  $(xmin, ymin, -near)$ ,  $(xmax, ymax, -near)$

# Προοπτική Προβολή & OpenGL

- `glFrustum(xmin, xmax, ymin, ymax, near, far)`



# Προοπτική Προβολή & OpenGL

```
glMatrixMode(GL_PROJECTION)
```

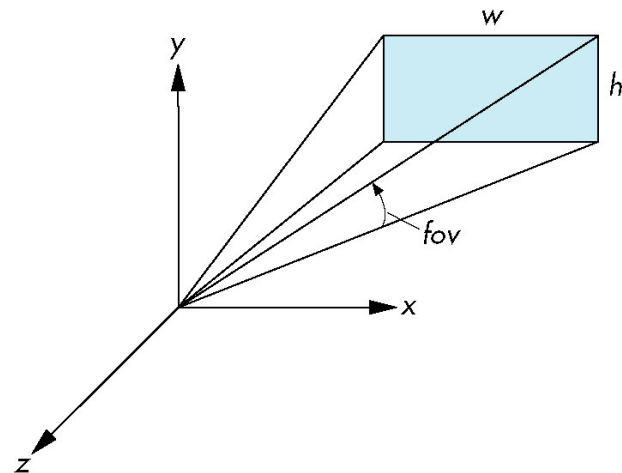
```
glLoadIdentity();
```

```
glFrustum(xmin, xmax, ymin, ymax, near, far)
```

- Η `glFrustum` κατασκευάζει κατάλληλο πίνακα και τον πολλαπλασιάζει με τον τρέχοντα `projection matrix`
- Η πυραμίδα δεν είναι απαραίτητα συμμετρική ως προς τον άξονα `z` (ορθή)
  - `xmin`<>`-xmax`, `ymin`<>`-ymax`

# Προοπτική Προβολή & OpenGL

- `gluPerspective(fovy, aspect, near, far)`
  - `fovy`: γωνία παρατήρησης στον  $y$
  - `aspect`: λόγος πλάτους / ύψους ( $x/y$ )
  - `near`, `far`: όπως και στην `glFrustum`
  - Συμμετρική πυραμίδα.



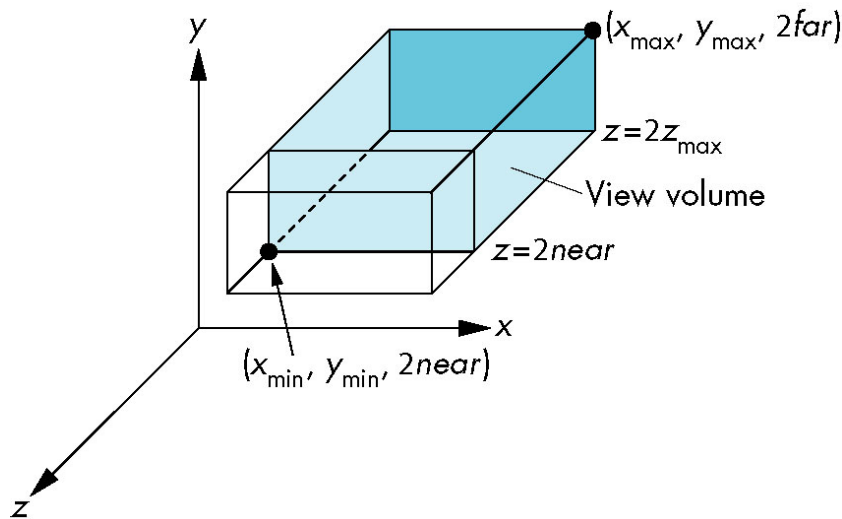


# Παράλληλη Ορθογραφική Προβολή & OpenGL

- `glOrtho(xmin, xmax, ymin, ymax, near, far)`: ορθογραφική προβολή
- Ορίζει παραλληλεπίπεδο παρατήρησης με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες
- Τα `near`, `far` αρνητικά ή θετικά
  - τα επίπεδα ψαλιδισμού  $z=-near$ ,  $z=-far$  μπορεί να είναι μπροστά η πίσω από την κάμερα
- Και τα αντικείμενα πίσω από την κάμερα προβάλλονται!

# Παράλληλη Ορθογραφική Προβολή & OpenGL

- `glOrtho(xmin, xmax, ymin, ymax, near, far)`: ορθογραφική προβολή

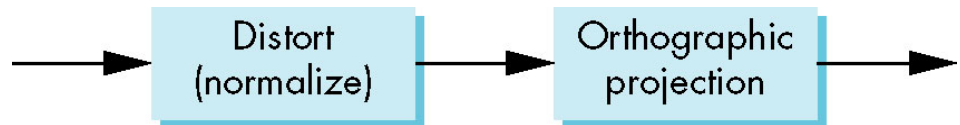
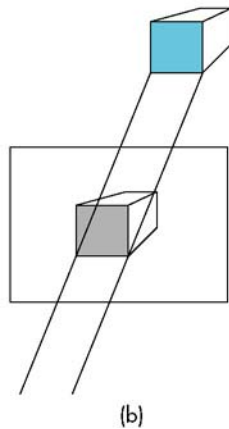
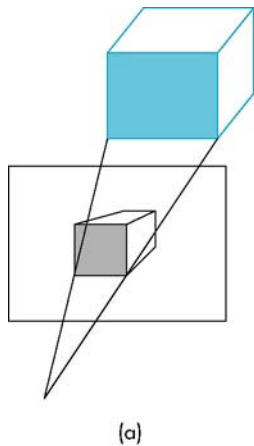


# Υπολογισμός πινάκων προβολής

- Οι εντολές της OpenGL κατάλληλες για τις τυπικές προβολές
  - Δεν επιτρέπουν π.χ. παράλληλη πλάγια προβολή
- Υπολογισμός των κατάλληλων πινάκων προβολής (Projection matrix)

# Υπολογισμός πινάκων προβολής

- Τεχνική που θα ακολουθηθεί:  
κανονικοποίηση προβολών
  - Μετατροπή όλων των προβολών σε ορθογραφικές
  - Παραμόρφωση των αντικείμενων ώστε η ορθογραφική τους προβολή να δίνει την επιθυμητή προβολή



# Υπολογισμός πινάκων παράλληλης ορθογραφικής προβολής

- Χωρισμός της προβολής σε δύο μέρη:
  - Μετασχηματισμός του όγκου παρατήρησης σε έναν «κανονικό» όγκο με αντιστρεπτό μετασχηματισμό (αντίστοιχη παραμόρφωση των αντικειμένων)
    - Περιγράφεται με συναφείς μετασχηματισμούς
  - Απλή ορθογραφική προβολή στο  $z=0$  (απαλοιφή του  $z$ ):  $x_p=x$ ,  $y_p=y$ ,  $z_p=0$

# Υπολογισμός πινάκων παράλληλης ορθογραφικής προβολής

- Projection matrix: το πρώτο τμήμα του μετασχηματισμού
  - Οι συντεταγμένες παραμένουν στις 3 διαστάσεις (window coordinates): χρήσιμο για τον ψαλιδισμό, απομάκρυνση κρυμμένων επιφανειών κλπ
  - μπορούν εύκολα να μετατραπούν σε 2 διαστάσεις (screen coordinates)

# Υπολογισμός πινάκων παράλληλης ορθογραφικής προβολής

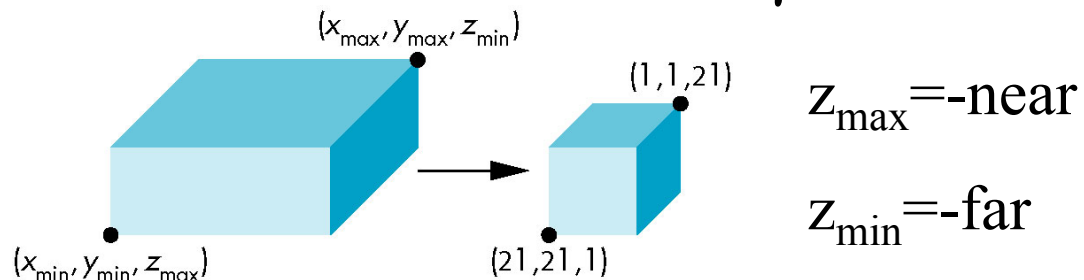
$$\mathbf{M}_{orth} \mathbf{M}_{transform}$$

$$\mathbf{M}_{orth} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projection matrix:  $\mathbf{M}_{transform}$

# Υπολογισμός πινάκων παράλληλης ορθογραφικής προβολής

- Ο απλούστερος όγκος παρατήρησης: κεντραρισμένος στην αρχή και με επίπεδα ψαλιδισμού  $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$ 
  - Κανονικός όγκος παρατήρησης (default για την OpenGL)
- Μετασχηματισμός του όγκου που ορίζεται από την glOrtho στον κανονικό όγκο





# Υπολογισμός πινάκων παράλληλης ορθογραφικής προβολής

$$T(-(x_{\max} + x_{\min})/2, -(y_{\max} + y_{\min})/2, -(z_{\max} + z_{\min})/2)$$

$$S(2/(x_{\max} - x_{\min}), 2/(y_{\max} - y_{\min}), 2/(z_{\max} - z_{\min}))$$

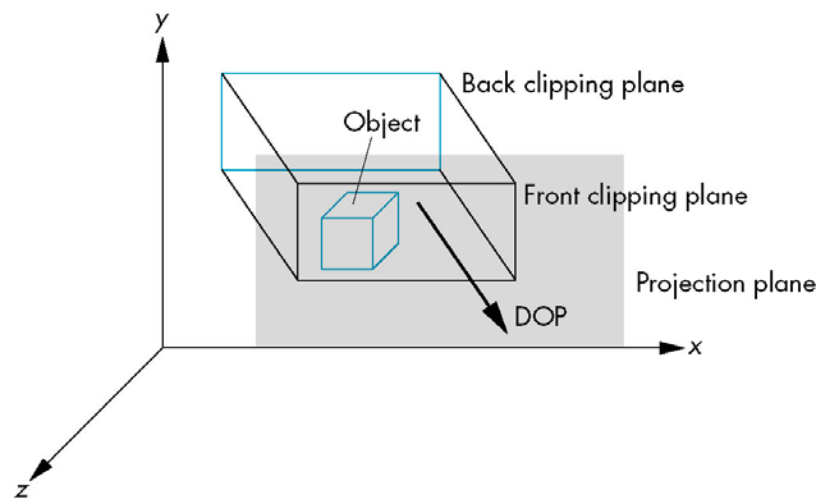
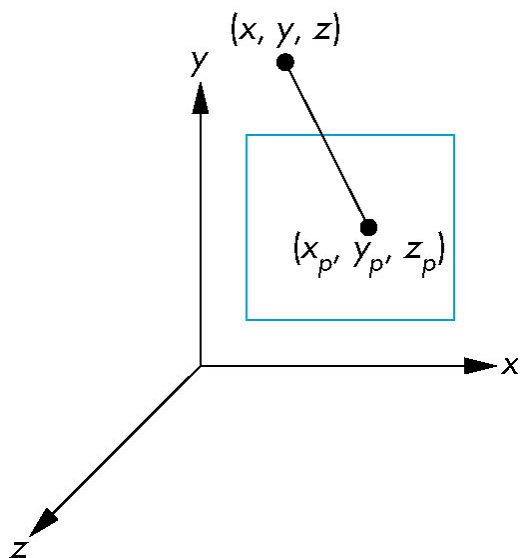
$$P = ST = \begin{bmatrix} 2/(x_{\max} - x_{\min}) & 0 & 0 & \frac{-(x_{\max} + x_{\min})}{(x_{\max} - x_{\min})} \\ 0 & 2/(y_{\max} - y_{\min}) & 0 & \frac{-(y_{\max} + y_{\min})}{(y_{\max} - y_{\min})} \\ 0 & 0 & 2/(z_{\max} - z_{\min}) & \frac{-(z_{\max} + z_{\min})}{(z_{\max} - z_{\min})} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Για ακτίνες προβολής από το  $+\infty$  τα στοιχεία (3, 3) & (3,4) του πίνακα με αντίθετο πρόσημο

# Υπολογισμός πινάκων παράλληλης πλάγιας προβολής

- Η OpenGL δεν παρέχει αντίστοιχη συνάρτηση.
- Εκφράζεται από δύο γωνίες  $\theta$ ,  $\varphi$ .
- Μπροστά & πίσω επίπεδα ψαλιδισμού παράλληλα στο επίπεδο προβολής.
- Πάνω, αριστερά κλπ επίπεδα προβολής παράλληλα στην κατεύθυνση προβολής.

# Υπολογισμός πινάκων παράλληλης πλάγιας προβολής

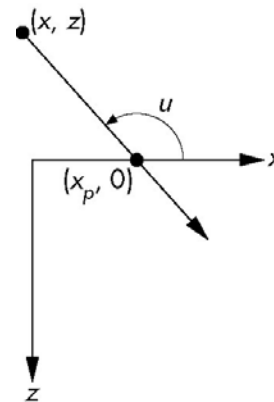


# Υπολογισμός πινάκων παράλληλης πλάγιας προβολής

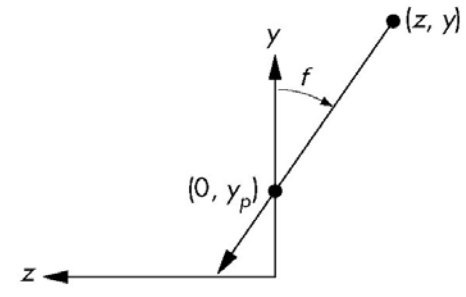
$$\tan \theta = \frac{z}{x - x_p}$$

$$x_p = x - z \cot \theta$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cot \theta & 0 \\ 0 & 1 & -\cot \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(a)



(b)

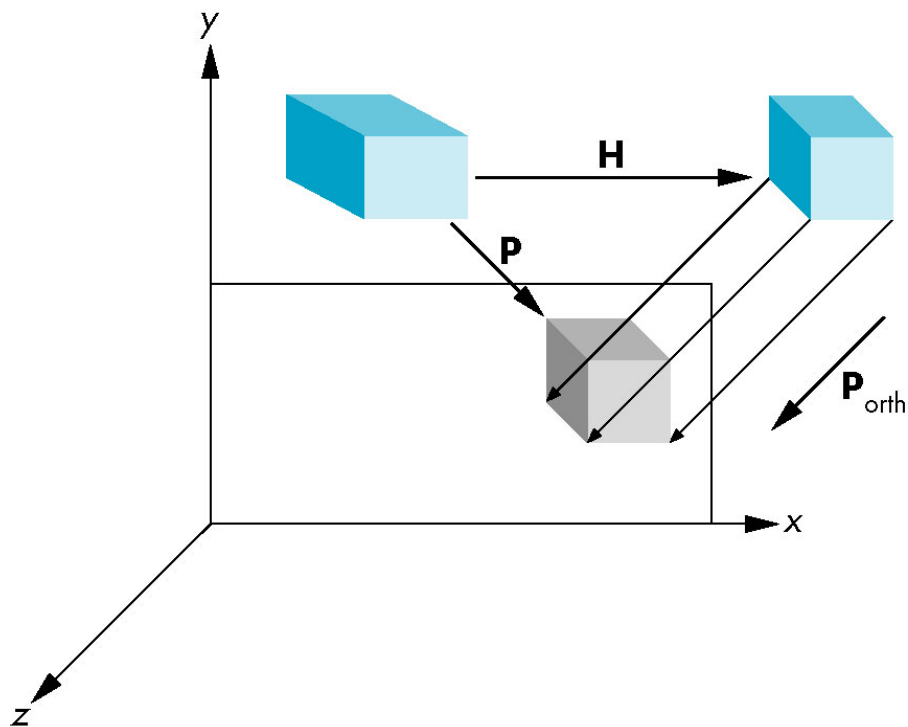
$$z_p = 0$$

# Υπολογισμός πινάκων παράλληλης πλάγιας προβολής

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}_{orth} \mathbf{H}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cot \theta & 0 \\ 0 & 1 & -\cot \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Η: πίνακας στρέβλωσης (2 «αντίστροφες» στρεβλώσεις)
- Οι «πλάγιες» πλευρές του όγκου παρατήρησης γίνονται κάθετες στο επίπεδο προβολής (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο)
- Τα αντικείμενα στρεβλώνουν
  - Η ορθογραφική προβολή τους είναι ταυτόσημη με την πλάγια προβολή των αρχικών σχημάτων

# Υπολογισμός πινάκων παράλληλης πλάγιας προβολής



# Υπολογισμός πινάκων παράλληλης πλάγιας προβολής

- Πρέπει να μετασχηματίσουμε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο σε κανονικό όγκο παρατήρησης

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}_{orth} \mathbf{S} \mathbf{T} \mathbf{H}$$

- Τα  $x_{min}$ ,  $x_{max}$ , ... στον  $\mathbf{S} \mathbf{T}$  είναι οι συντεταγμένες του ορθ. παραλληλεπιπέδου που παίρνουμε μετά τη στρέβλωση.

# Υπολογισμός πινάκων προοπτικής προβολής

- Εύρεση του μετασχηματισμού που μετατρέπει ένα «κανονικό» frustum σε κανονικό όγκο παρατήρησης (κύβο).
- Μετασχηματισμός frustum γενικής μορφής σε «κανονικό» frustum.



# Υπολογισμός πινάκων προοπτικής προβολής

- Κανονικό frustum: συμμετρικό, με γωνία όρασης  $90^0$  σε  $x$  &  $y$  και  $45^0$  με το επίπεδο προβολής

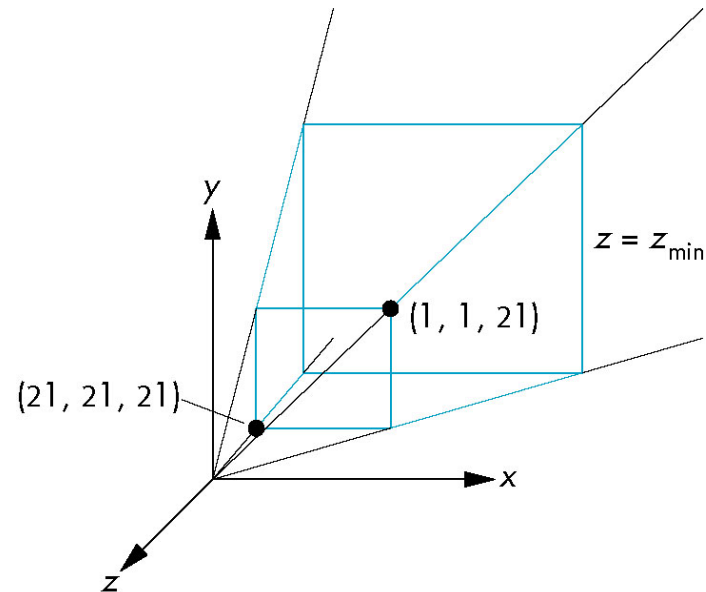
# Υπολογισμός πινάκων προοπτικής προβολής

- Επίπεδα ψαλιδισμού

$$x = \pm z \quad z = z_{\max} \quad 0 > z_{\max} > z_{\min}$$

$$y = \pm z \quad z = z_{\min}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



# Υπολογισμός πινάκων προοπτικής προβολής

$$x' = x$$

$$x'' = -x / z$$

$$y' = y$$

$$y'' = -y / z$$

$$z' = \alpha z + \beta$$

$$z'' = -(\alpha + \beta / z)$$

$$w' = -z$$

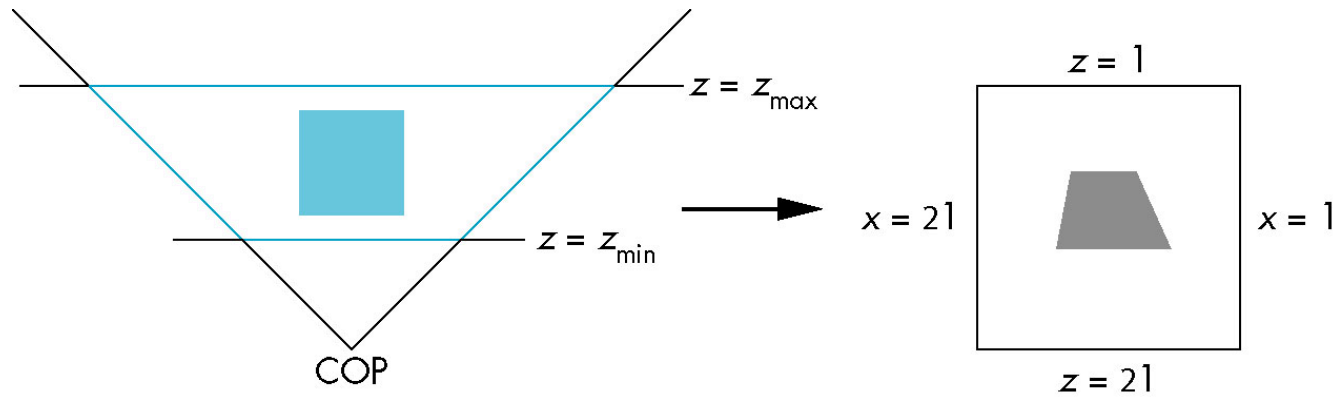
# Υπολογισμός πινάκων προοπτικής προβολής

- Ο  $N$  μετασχηματίζει τον όγκο παρατήρησης σε κανονικό όγκο παρατήρησης, επιλέγοντας κατάλληλα τα  $\alpha$ ,  $\beta$ .
  - $x = \pm z$                        $x = \mp 1$
  - $y = \pm z$                       σε                       $y = \mp 1$
- $z = z_{\max}$  (μπροστά επίπεδο) σε  $z'' = -(\alpha + \beta / z_{\max})$
- $z = z_{\min}$  (πίσω επίπεδο) σε  $z'' = -(\alpha + \beta / z_{\min})$

# Υπολογισμός πινάκων προοπτικής προβολής

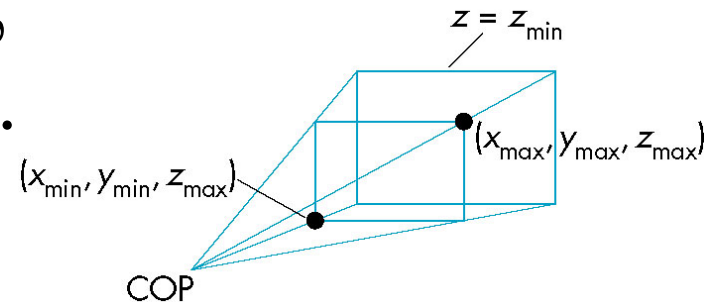
- Επιλέγω  $\alpha = -\frac{z_{\max} + z_{\min}}{z_{\max} - z_{\min}}, \beta = \frac{2z_{\max} z_{\min}}{z_{\max} - z_{\min}}$
- Το πίσω επίπεδο πάει στο  $z=-1$ , το μπροστά στο  $z=1$
- Ο  $\mathbf{N}$  μετασχηματίζει την κόλουρη πυραμίδα σε ορθ. παραλληλεπίπεδο (κανονικό όγκο παρατήρησης)
  - Πίνακας κανονικοποίησης προοπτικής
- Συνδυάζω με ορθογραφική προβολή  $\mathbf{M}_{\text{orth}}\mathbf{N}$
- Ορθογραφική προβολή στον μετασχηματισμένο όγκο δρα σαν προοπτική προβολή.

# Υπολογισμός πινάκων προοπτικής προβολής



# Πίνακες προοπτικής προβολής & OpenGL

- Η OpenGL (`glFrustum`) επιτρέπει και μη συμμετρική πυραμίδα.
- Υπολογισμός του γενικού πίνακα προοπτικής προβολής μετασχηματίζοντας το frustum σε συμμετρικό με  $45^\circ$  γωνία και στη συνέχεια εφαρμόζοντας κανονικοποίηση προοπτικής.



# Πίνακες προοπτικής προβολής & OpenGL

- Μετασχηματισμός της πυραμίδας σε συμμετρική με στρέβλωση

$$\left( \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}, \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}, z_{\max} \right) \text{ σε } (0, 0, z_{\max})$$

$$H(\theta, \phi) = H\left(\cot^{-1}\left(\frac{x_{\min} + x_{\max}}{2z_{\max}}\right), \cot^{-1}\left(\frac{y_{\min} + y_{\max}}{2z_{\max}}\right)\right)$$

$$x = \pm \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2z_{\max}} z \quad y = \pm \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2z_{\max}} z$$

$$z = z_{\min}, z = z_{\max}$$



# Πίνακες προοπτικής προβολής & OpenGL

- Μετασχηματισμός της κανονικής πυραμίδας σε πυραμίδα με  $45^\circ$  χωρίς να αλλάξουν τα μπροστά/πίσω επίπεδα με κλιμάκωση
- Θέλω πλευρικά επίπεδα ψαλιδισμού:  
 $x = \pm z$   
 $y = \pm z$

$$S(-2z_{\max} / (x_{\max} - x_{\min}), -2z_{\max} / (y_{\max} - y_{\min}), 1)$$

# Πίνακες προοπτικής προβολής & OpenGL

- Τώρα μπορώ να εφαρμόσω κανονικοποίηση προοπτικής

$$\mathbf{P} = \mathbf{NSH} = \begin{bmatrix} -2z_{\max} / (x_{\max} - x_{\min}) & 0 & \frac{(x_{\max} + x_{\min})}{(x_{\max} - x_{\min})} & 0 \\ 0 & -2z_{\max} / (y_{\max} - y_{\min}) & \frac{(y_{\max} + y_{\min})}{(y_{\max} - y_{\min})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(z_{\max} + z_{\min})}{(z_{\max} - z_{\min})} & \frac{2z_{\max} z_{\min}}{(z_{\max} - z_{\min})} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Για ακτίνες προβολής από το  $+\infty$  τα στοιχεία (3, 3) & (3,4) του πίνακα με αντίθετο πρόσημο.